

国土技術政策総合研究所資料

TECHNICAL NOTE of
National Institute for Land and Infrastructure Management

No.895

March 2016

短波海洋レーダとベイズ型モデルを用いた 浅海波の方向スペクトルの推定

片岡 智哉

A bayesian inversion for a directional spectrum of ocean waves
in shallow water using HF radar

Tomoya KATAOKA

国土交通省 国土技術政策総合研究所

National Institute for Land and Infrastructure Management
Ministry of Land, Infrastructure, Transport and Tourism, Japan

短波海洋レーダとベイズ型モデルを用いた 浅海波の方向スペクトルの推定

片岡智哉*

要 旨

短波海洋（HF）レーダで観測されたドップラースペクトルの2次散乱を解析することで方向スペクトルを推定することができる。しかし、襲来する波浪の波長に対して水深が浅い海域（浅海域）では、波浪の分散関係から波浪は海底の影響を受けるようになる。これに伴い、HFレーダで観測されるドップラースペクトルの2次散乱も変化する。短波海洋レーダとベイズ型モデルを用いた既往の方向スペクトルの推定法は、深海波を仮定しており、浅海域における波浪の分散関係を考慮されていない。そのため、浅海域で既往手法を適用した場合、必ずしも精度のよい方向スペクトルが得られるとは限らない。

そこで、本研究ではHFレーダを用いて深海域から浅海域までシームレスな波浪観測を実現するため、HFレーダとベイズ型モデルを用いた既往の方向スペクトル推定法を浅海域にも適用できるように改良した。さらに、深海波の仮定による浅海域での方向スペクトルの推定精度に及ぼす影響やビーム交差角による推定精度に及ぼす影響について検討し、以下の結論を得た。

- 1) 深海波を仮定して浅海域で方向スペクトルを推定すると、深海波の波長に対する相対水深が0.5以下になる場合、方向スペクトルの推定精度が悪化し、異常な方向スペクトルが推定される。
- 2) ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定法は、HFレーダのビーム交差角に対する推定精度の依存性が低く、ビーム交差角が7.5°以上であれば、実用上十分な精度で方向スペクトルの推定可能である。
- 3) これらの結果は単一HFレーダ局であっても、同レンジの隣り合うビームで観測されたドップラースペクトルを用いることで、方向スペクトルを高精度に推定できることを示唆する。

キーワード：短波海洋レーダ，ベイズ型モデル，方向スペクトル，浅海波

*沿岸海洋・防災研究部 沿岸域システム研究室研究官
〒239-0826 横須賀市長瀬3-1-1 国土交通省国土技術政策総合研究所
電話：046-844-5025 Fax：046-844-1145 e-mail: kataoka-t852a@mlit.go.jp

A bayesian inversion for a directional spectrum of ocean waves in shallow water using HF radar

Tomoya KATAOKA*

Synopsis

A directional spectrum can be estimated by solving a nonlinear integral equation for the second-order scattering in the Doppler spectrum measured using high-frequency (HF) radars. Hashimoto and Tokuda (1999) has developed a bayesian inversion method for estimating a directional spectrum of ocean waves in deep water from the Doppler spectrum (BIM_{deep}). In shallow water, it could be difficult to accurately estimate the directional spectrum by BIM_{deep} because the Doppler spectrum depends on water depth due to the linear dispersion relation in shallow water.

We improved the bayesian inversion method to accurately estimate the directional spectrum in shallow water waves ($BIM_{shallow}$). In addition, we investigated the factors determining the accuracy of the estimated directional spectrum in shallow water based on the numerical experiments. This study enables us to seamlessly measure a directional spectrum from deep water zone to shallow water zone using HF radar.

- 1) When the relative depth to the wavelength in deep water is less than 0.5, the directional spectrum can be inaccurately estimated by applying BIM_{deep} .
- 2) The accuracy of estimated directional spectrum is unrelated to the relative angle of two beams of HF radar, if the relative angle is greater than 7.5 degrees.
- 3) These results suggest that the directional spectrum can be accurately estimated by using the Doppler spectra observed at the same range on the adjacent beams.

Keywords: high-frequency radar, bayesian inversion, directional spectrum, shallow water

*Researcher of Coastal Zone Systems Division , Coastal, Marine and Disaster Prevention Department
3-1-1 Nagase, Yokosuka, 239-0826 Japan
Phone : +81-468-44-5025 Fax : +81-468-44-1145e-mail:kataoka-t852a@mlit.go.jp

目 次

| | |
|-------------------------------|----|
| 1. はじめに | 1 |
| 2. ドップラースペクトルから方向スペクトルの推定 | 2 |
| 2.1 ドップラースペクトルの定式化 | 2 |
| 2.2 ドップラースペクトルの数値計算法 | 4 |
| 2.3 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定法 | 6 |
| 2.4 最適なハイパーパラメータと最小二乗解の決定 | 7 |
| 3. 数値実験 | 8 |
| 3.1 モデル波浪の方向スペクトルと2次散乱 | 8 |
| 3.2 深海波仮定による方向スペクトルの推定精度への影響 | 12 |
| 3.3 ビーム交差角による方向スペクトルの推定精度への影響 | 14 |
| 4. 考察 | 15 |
| 5. 結論 | 16 |
| 謝辞 | 16 |
| 参考文献 | 16 |
| 記号表 | 18 |
| 付録A | 20 |
| 付録B | 23 |

1. はじめに

海表面を伝搬する不規則波は、様々な方向から伝わる成分波の線形重ね合わせで表現され、複雑な波浪現象を解明する上で、海洋波の方向スペクトルの観測は必要不可欠である。これまでにクローバー型波浪計(例えば、Mitsuyasu et al., 1975) や多層型超音波ドップラー式海象計(例えば、橋本ら, 2015) で計測された波動量を様々な手法で解析することで方向スペクトルの観測がなされてきた。ただし、これらの機器はいずれも海に設置するものであるため、方向スペクトルを面的に得ることは難しい。方向スペクトルを面的に得ることができれば、波浪の伝搬過程や成長過程など沿岸域における波浪研究の更なる発展に寄与することが期待される。

海洋波の方向スペクトルを面的に観測できる機器として短波海洋 (high frequency; 以下, HF) レーダがある。HF レーダは海面に放射した電波が海表面で電波波長の半分の波長をもつ成分波に強く散乱(ブラッグ共鳴散乱)する機構を利用することで、陸上から広域に海表面における様々な海洋情報(流速, 波浪や海上風等)を取ることができ、これまでに HF レーダは流況観測機器として数多く利活用されてきた。例えば、国土交通省港湾局では、海洋環境整備事業の一環として閉鎖性内湾(東京湾, 伊勢・三河湾, 大阪湾・紀伊水道, 有明海)に HF レーダを整備し、計測された表面流速を用いて漂流ゴミの集積域予測に活用している(Kataoka et al., 2013)。また、Hinata et al. (2011) は、国土交通省近畿地方整備局が紀伊水道に設置する HF レーダで東北地方太平洋沖地震津波の流速を計測して水道内での進行波の伝搬過程や水道内での副振動を面的に捉えることに成功した。

海洋波の方向スペクトルは、HF レーダで計測されたドップラースペクトルを解析することで推定することが可能である。ドップラースペクトルは、海洋波にブラッグ共鳴散乱して生じる 1 次散乱と 2 次散乱からなり、Barrick によってレーダ方程式を摂動展開することで定式化された(Barrick, 1972)。この内、2 次散乱は 2 つの成分波の波数スペクトルを被積分関数にもつ非線形積分方程式で表現され、計測されたドップラースペクトルを用いて非線形積分方程式の逆問題を解くことで、方向スペクトルを推定することが可能になる。

ドップラースペクトルから方向スペクトルを推定す

る方法は、1990 年代より始まりこれまでに様々な解析手法が提案されてきた(例えば、Wyatt, 1990; Hisaki, 1996; Hashimoto and Tokuda, 1999)。Wyatt (1990)は、非線形積分方程式を Barrick (1977)に基づいて線形化した後、Chahine-Twomey アルゴリズムを拡張した緩和法を適用して繰り返し計算で方向スペクトルを推定した。これに対して、Hisaki (1996)と Hashimoto and Tokuda (1999)は、方向スペクトルを離散的な一定値関数として扱い、方向スペクトルに関するいくつかの先験条件を考慮することで、非線形積分方程式のまま繰り返し計算で方向スペクトルを推定した。Hashimoto and Tokuda (1999)は、方向スペクトルに関する先験条件を導入したベイズ型モデルを用いて非線形積分方程式から方向スペクトルの最適解を決めるものであり、EC MAST SCAWVEX project の現地観測データに適用し、安定的に方向スペクトルを推定できることを確認している(橋本ら, 2010)。このベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定手法(以下、ベイズ法)は、多層型超音波ドップラー式海象計から方向スペクトルを推定する際にも用いられており、信頼性の高い方向スペクトルの推定手法といわれている(合田, 2008)。

Hashimoto and Tokuda (1999)では、ドップラースペクトルから深海域における海洋波の方向スペクトルの推定を前提としている。すなわち、深海域におけるドップラースペクトルの基礎式を用いたベイズ法 (Bayesian inversion method in deep water; 以下、BIM_{deep})を適用し、方向スペクトルを推定した。一般に、深海波と浅海波は相対水深(深海波の波長に対する水深の比)で分類され、相対水深が 0.5 以上となる場合を深海波、それ以下となる場合を浅海波と呼ぶ。そのため、同水深であっても襲来する波浪の波長に応じて浅海波となる。浅海域で計測されたドップラースペクトルから BIM_{deep} で方向スペクトルを推定すると、その推定精度が悪くなる可能性がある。現時点で我が国では、水深 100 m 以下の比較的水深の浅い閉鎖性内湾に多くの HF レーダが整備されている。これらの HF レーダを活用し、外洋から沿岸までの海洋波の伝搬過程をシームレスに観測するためには、浅海域にも適用可能な方向スペクトルの推定手法の確立は必要不可欠である。

そこで、本研究では外洋から沿岸までの海洋波をシームレスに観測するため、Hashimoto and Tokuda (1999)が開発したベイズ法を浅海域にも適用可能なもの (Bayesian inversion method in shallow water; 以下、BIM_{shallow})に拡張することを目的とする。第 2 章では、

Barrick (1972)によって定式化された浅海域におけるドップラースペクトルの基礎式について述べ、それを用いた BIM_{shallow} について詳説する。第3章では、まず波浪条件や観測条件によるドップラースペクトルの形状変化について述べる。その後、数値実験に基づき、 BIM_{deep} による浅海波の方向スペクトルの推定精度への影響、並びにビーム交差角による方向スペクトルの推定精度への影響について調べる。一般に、HF レーダで表面流速を計測する場合、2つのレーダ局の視線方向流速をベクトル合成する必要があるため、その計測精度は2局からのビームの交差角に依存する。もしビーム交差角に方向スペクトルの推定精度が依存しないのであれば、より広域な方向スペクトルの推定が可能になる。したがって、本研究はHFレーダによる広域的な波浪観測技術の高度化に資するための基礎資料となることが期待される。

2. ドップラースペクトルから方向スペクトルの推定法

本章では浅海域においてHFレーダで観測されたドップラースペクトルから方向スペクトルを推定する手法 (BIM_{shallow}) について説明する。方向スペクトルを推定するため、まずドップラースペクトルの1次及び2次散乱の定式化 (2.1) と数値計算法 (2.2) につい

て述べる。その後、Hashimoto and Tokuda(1999)が提案したベイズ型モデルを用いてドップラースペクトルから方向スペクトルの推定手法 (2.3 及び 2.4) について述べる。

2.1 ドップラースペクトルの定式化

HF レーダで計測されるドップラースペクトルは、ブラッグ共鳴散乱機構 (Crombie, 1955) によって生じる1次散乱と2次散乱からなる。1次散乱は、放射する電波波数 k_0 の2倍の波数 $2k_0$ (電波波長 $\lambda_0 (=2\pi/k_0)$ 半分の波長 $\lambda_0/2$) をもつ成分波にブラッグ共鳴散乱することで生じる (Crombie, 1955)。ブラッグ共鳴散乱を引き起こす成分波の角周波数 (ブラッグ散乱角周波数) ω_B は、波浪の分散関係式を用いて次式で定義される。

$$\omega_B = 2\pi f_B = \sqrt{2gk_0 \tanh(2k_0 h)} \quad (2.1)$$

ここで、 f_B はブラッグ散乱周波数、 g は重力加速度 (9.81 ms^{-2})、 h は観測点における水深である。一方、2次散乱は、海洋波に含まれるある2つの成分波の波数ベクトルが、HFレーダのビーム方向を x 軸、それに直交するアジマス方向を y 軸にとった波数ベクトル平面 ($k_x - k_y$ 平面) において次式の共鳴条件を満足する場合に生じる (図-2.1(a))。

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = -2\mathbf{k}_0 \quad (2.2)$$

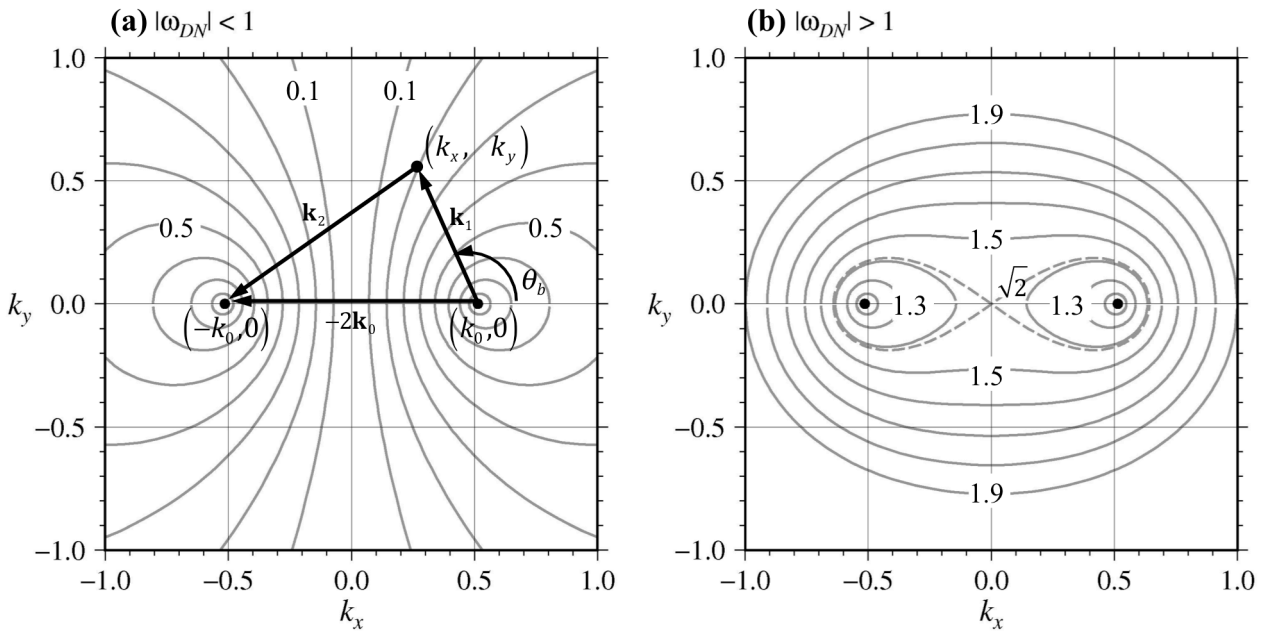


図-2.1 波数ベクトル平面における ω_{DN} の等値線。

(a)中に2次散乱が生じる2つの成分波の共鳴条件を示す。

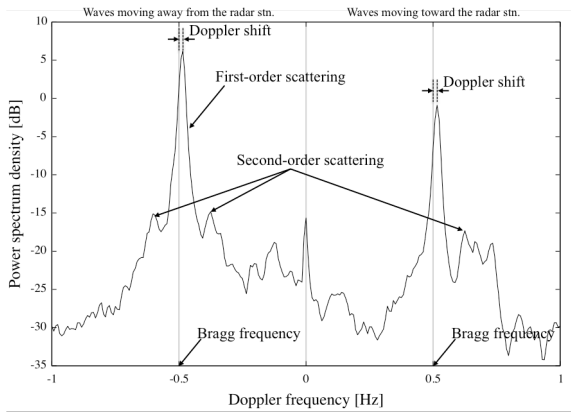


図-2.2 24.5MHz の HF レーダによるドップラースペクトルの観測例

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = (k_x - k_0, k_y), & \mathbf{k}_2 = (-k_x - k_0, -k_y) \\ \mathbf{k}_0 = (k_0, 0) \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで、 \mathbf{k}_1 及び \mathbf{k}_2 は 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の波数ベクトル、 $2\mathbf{k}_0$ はブラッグ 1 次散乱を引き起こす成分波の波数ベクトルある。

図-2.2 は周波数 24.5MHz の HF レーダで計測されたドップラースペクトルの観測例である。この場合、電波波長 λ_0 は電波速度 v_0 ($= 3.0 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$) を電波周波数 f_0 ($= 24.5 \times 10^6 \text{ Hz}$) で除して 12.2 m となる。また、ブラッグ散乱周波数 f_B は式(2.1)の分散関係から 0.505 Hz となる。厳密には、ブラッグ散乱周波数は式(2.1)に示すように観測水深に依存するが、ブラッグ 1 次散乱を生じさせる成分波の波長 ($\lambda_0/2=6.1 \text{ m}$) を考慮すると、 $h > 3 \text{ m}$ においては相対水深が 0.5 以上 (すなわち、深海波) であるため、ブラッグ散乱周波数を 0.505 Hz と考えて差し支えない。実際に、ブラッグ散乱周波数に相当する $\pm 0.505 \text{ Hz}$ 付近に大きな 1 次散乱、その周りに 2 次散乱が生じていることがわかる (図-2.2)。本来、1 次散乱はブラッグ散乱周波数の位置に生じるが、図-2.2 の観測時にレーダ局に近づく方向に海表面流が生じていたため、プラス側へのドップラースhiftが生じている。

ドップラースペクトルの定式化は Barrick (1972) によって行われた。観測されるドップラースペクトルの 1 次散乱強度 $d^{(1)}(\omega_D)$ 及び 2 次散乱強度 $d^{(2)}(\omega_D)$ は、それぞれ 1 次散乱断面積 $\sigma^{(1)}(\omega_D)$ 及び 2 次散乱断面積 $\sigma^{(2)}(\omega_D)$ に比例する。すなわち、

$$\begin{cases} d^{(1)}(\omega_D) = a\sigma^{(1)}(\omega_D) \\ d^{(2)}(\omega_D) = a\sigma^{(2)}(\omega_D) \end{cases} \quad (2.4)$$

ここで、 a は未知の比例定数である。Barrick (1972) は、ランダムな凹凸のある海表面で起きる電波の後方散乱がブラッグ共鳴散乱機構に準じていると仮定することにより、レーダ方程式を Rice の摂動法に基づき摂動展開し、1 次及び 2 次散乱断面積を次のように定式化した。

$$\sigma^{(1)}(\omega_D) = 2^6 \pi k_0^4 S(-2m_2 \mathbf{k}_0) \delta(\omega_D - m_2 \omega_B) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)}(\omega_D) = & 2^6 \pi k_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_T|^2 S(m_1 \mathbf{k}_1) S(m_2 \mathbf{k}_2) \\ & \times \delta(\omega_D - y) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 ω_D はドップラー角周波数、両式の $\delta(\cdot)$ はデルタ関数を意味し、以下の条件を満足するとき、 $\delta(\cdot) = 1$ となる。

$$\omega_D - m_2 \omega_B = 0 \quad (2.7)$$

$$\omega_D - y = 0, \quad y = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 \quad (2.8)$$

式(2.7)及び式(2.8)の m_1 及び m_2 はドップラー角周波数の領域に依存した符号で下記のとおりである。

$$(m_1, m_2) = \begin{cases} (-1, -1) & \text{for } \omega_D < -\omega_B \\ (1, -1) & \text{for } -\omega_B < \omega_D < 0 \\ (-1, 1) & \text{for } 0 < \omega_D < \omega_B \\ (1, 1) & \text{for } \omega_D > \omega_B \end{cases} \quad (2.9)$$

また、 ω_i ($i=1,2$) は、波数 k_i ($= |\mathbf{k}_i|$) をもつ成分波の角周波数であり、式(2.1)と同様に分散関係を満足する。

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)} \quad (2.10)$$

式(2.5)及び式(2.6)中の $S(\mathbf{k})$ は波浪の波数スペクトルである。海洋波が各成分波の線形重ね合わせで表現されると仮定すると、波数スペクトルは式(2.10)の分散関係式を用いて方向スペクトルに変換することができる (Holthuijsen, 2009)。

$$S(\mathbf{k}) = \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} S(\omega, \theta) \quad (2.11)$$

$\partial \omega / \partial k$ は、波数領域から角周波数領域に変換するための Jacobian であり、式(2.10)を k で微分して

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g}{2\omega} \left[\tanh(kh) + kh \text{sech}^2(kh) \right] \quad (2.12)$$

となる。式(2.6)中の Γ_T は、2 つの成分波が 2 次散乱に寄与する程度を表し、結合係数と呼ばれる。結合係数 Γ_T は、電磁気学的な後方散乱 (図-2.3(a)) による部分 Γ_E と流体力学的な後方散乱 (図-2.3(b)) による部分 Γ_H からなる複素数で表される。

$$\Gamma_T = \Gamma_E + i\Gamma_H \quad (2.13)$$

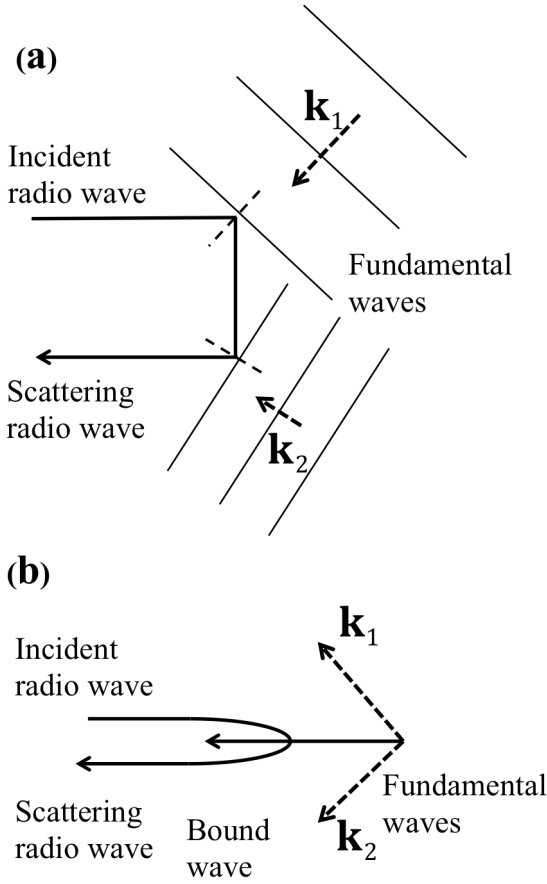


図-2.3 2次散乱の模式図（土木学会(2001)の図-4.3.1を基に筆者作成）. (a)電磁気学的効果, (b)流体力学的効果

$$\Gamma_E = \frac{1}{2} \left[\frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_0)/k_0^2 - 2\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^{1/2} - k_0 \Delta} \right] \quad (2.14)$$

$$\Gamma_H = -\frac{1}{2} \left\{ k_{d1} + k_{d2} + \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 - k_{d1} k_{d2}}{m_1 m_2 (k_{d1} k_{d2})^{1/2}} \left(\frac{\omega_D^2 + \omega_B^2}{\omega_D^2 - \omega_B^2} \right) + \frac{\omega_D \left[m_1 (g k_{d1})^{3/2} \operatorname{csch}^2(k_1 h) + m_2 (g k_{d2})^{3/2} \operatorname{csch}^2(k_2 h) \right]}{g(\omega_D^2 - \omega_B^2)} \right\} \quad (2.15)$$

ここで、式(2.14)の Δ は海面の複素インピーダンスであり、Lipa and Barrick (1986)に基づく、 $\Delta = 0.011 - 0.012i$ である。また、 k_{di} ($i=1,2$)は深海域における波数を意味し、次式で定義される。

$$k_d = k \tanh(kh) \quad (2.16)$$

2次散乱に寄与する2つの成分波の組合せは、式(2.2)及び式(2.8)の制限内で無数にある。式(2.2)及び式(2.8)

の制限の下、波数ベクトル平面上にドップラー角周波数の等値線を描くと図-2.1ようになる。このドップラー角周波数の等値線は式(2.6)の積分経路に相当し、これに沿って数値積分することで、各ドップラー角周波数における2次散乱断面積を計算することができる。

2.2 ドップラースペクトルの数値計算法

式(2.5)及び式(2.6)に示すように、1次及び2次散乱断面積は海面に放射する電波の波数 k_0 に依存するため、同じ波浪場であっても放射する電波の周波数によって1次及び2次散乱強度が異なる。そこで、式(2.5)及び式(2.6)で計算した1次及び2次散乱断面積を用いて方向スペクトルを推定する際、便宜的にブラッグ散乱角周波数 ω_B とブラッグ散乱を引き起こす波数 $2k_0$ （電波波数の2倍）を用いて、式(2.5)及び式(2.6)中の各変数を以下のように規格化する。

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{Ni} = \mathbf{k}_i / (2k_0), & \omega_{Ni} = \omega_i / \omega_B, \\ S_N(\mathbf{k}_{Ni}) = (2k_0)^4 S(\mathbf{k}_i), \\ \Gamma_{TN} = \Gamma_T / (2k_0), & \omega_{DN} = \omega_D / \omega_B, \\ dk_{xN} = dk_x / (2k_0), & dk_{yN} = dk_y / (2k_0) \end{cases} \quad (2.17)$$

($i=1,2$)

ここで、添字の N は各変数を規格化していることを意味する。この場合、式(2.2)の2つの成分波の共鳴条件は、

$$\mathbf{k}_{N1} + \mathbf{k}_{N2} = -\mathbf{n} \quad (2.18)$$

となる。 \mathbf{n} は単位ベクトルである（すなわち、 $\mathbf{n}=(1,0)$ ）。また、結合係数を規格化すると、電磁気学的な部分 Γ_{EN} と流体力学的な部分 Γ_{HN} はそれぞれ次式となる。

$$\Gamma_{EN} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\mathbf{k}_{N1} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{k}_{N2} \cdot \mathbf{n}) - 2\mathbf{k}_{N1} \cdot \mathbf{k}_{N2}}{(\mathbf{k}_{N1} \cdot \mathbf{k}_{N2})^{1/2} - \Delta/2} \right] \quad (2.19)$$

$$\Gamma_{HN} = -\frac{1}{2} \left\{ k_{dN1} + k_{dN2} + \frac{\mathbf{k}_{N1} \cdot \mathbf{k}_{N2} - k_{dN1} k_{dN2}}{m_1 m_2 (k_{dN1} k_{dN2})^{1/2}} \left(\frac{\omega_{DN}^2 + 1}{\omega_{DN}^2 - 1} \right) + \frac{\omega_{DN} \left[m_1 k_{dN1}^{3/2} \operatorname{csch}^2(k_{N1} h_N) + m_2 k_{dN2}^{3/2} \operatorname{csch}^2(k_{N2} h_N) \right]}{[\tanh(h_N)]^{1/2} (\omega_{DN}^2 - 1)} \right\} \quad (2.20)$$

ここで、 k_{dNi} ($i=1,2$)及び h_N は、それぞれ k_{di} ($i=1,2$)及び h を $2k_0$ で規格化して

$$k_{dN} = k_d / 2k_0, \quad h_N = 2k_0 h \quad (2.21)$$

となる。式(2.17)の各変数を式(2.5)及び式(2.6)に代入すると、次式のように規格化された1次及び2次散乱断面積が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma_N^{(1)}(\omega_{DN}) &= \omega_B \sigma^{(1)}(\omega_D) \\ &= 4\pi S_N(-m_2 \mathbf{n}) \delta(\omega_{DN} - m_2)\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}\sigma_N^{(2)}(\omega_{DN}) &= \omega_B \sigma^{(2)}(\omega_D) \\ &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{TN}|^2 S_N(m_1 \mathbf{k}_{N1}) S_N(m_2 \mathbf{k}_{N2}) \\ &\quad \times \delta(\omega_{DN} - y_N) dk_{xN} dk_{yN}\end{aligned}\quad (2.23)$$

ここで、式(2.23)のデルタ関数は、式(2.8)と同様に、次式の条件を満足するとき、 $\delta(\cdot)=1$ となる。

$$\begin{cases} \omega_{DN} - y_N = 0, \\ y_N = y/\omega_B = m_1 \omega_{N1} + m_2 \omega_{N2} \end{cases}\quad (2.24)$$

である。また、 m_1 及び m_2 は式(2.9)と同様に、 ω_{DN} の領域に応じて下記の値をとる。

$$(m_1, m_2) = \begin{cases} (-1, -1) & \text{for } \omega_{DN} < -1 \\ (1, -1) & \text{for } -1 < \omega_{DN} < 0 \\ (-1, 1) & \text{for } 0 < \omega_{DN} < 1 \\ (1, 1) & \text{for } \omega_{DN} > 1 \end{cases}\quad (2.25)$$

式(2.10)を式(2.1)で規格化すると、分散関係式は

$$\omega_N = \sqrt{k_N \coth(h_N) \tanh(k_N h_N)}\quad (2.26)$$

となる。なお、式(2.22)及び式(2.23)の導出では、デルタ関数の性質 ($\delta(ax) = \delta(x)/|a|$) を用いている。規格化した波数スペクトル $S_N(\mathbf{k}_N)$ は、式(2.11)と同様に、分散関係式を用いて次式で表現できる。

$$S_N(\mathbf{k}_N) = \frac{1}{k_N} \frac{\partial \omega_N}{\partial k_N} S_N(\omega_N, \theta)\quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \omega_N}{\partial k_N} = \frac{\coth(h_N)}{2\omega_N} \left[\tanh(k_N h_N) + k_N h_N \operatorname{sech}^2(k_N h_N) \right]\quad (2.28)$$

ここで、 $S_N(\omega_N, \theta)$ は規格化された方向スペクトルであり、式(2.11)、式(2.17)及び式(2.27)から $S(\omega, \theta)$ もしくは $S(f, \theta)$ を用いて

$$\begin{aligned}S_N(\omega_N, \theta) &= (2k_0)^2 \omega_B S(\omega, \theta) \\ &= (2k_0)^2 f_B S(f, \theta)\end{aligned}\quad (2.29)$$

となる。

式(2.27)を式(2.22)に代入すると、1次散乱断面積は、 $S_N(\omega_N, \theta)$ を用いて

$$\sigma_N^{(1)}(\omega_{DN}) = C_1(\omega_{DN}, \theta_{b0}) S_N(1, \theta_{b0} + \phi_b)\quad (2.30)$$

と表現できる。なお、 $\omega_{DN} = \pm 1$ である。 ϕ_b は HF レーダから放射された電波が観測点に伝達してくる方向（ビーム方向角）を意味し、真北から時計回りの角度で表す。例えば、 $\phi_b = 180^\circ$ の場合、南方向から観測点に電波が伝達してきたことを意味する。 θ_{b0} はブラッグ散乱を引き起こす波の波向とビーム方向角の相対角

を意味し、 $\theta_{b0} = -0.5(m_2 + 1)\pi$ で定義される。 $C_1(\omega_{DN}, \theta_{b0})$ は

$$\begin{aligned}C_1(\omega_{DN}, \theta_{b0}) &= 4\pi \left[\frac{1}{k_N} \frac{\partial \omega_N}{\partial k_N} \right]_{k_N=1} \\ &= 2\pi \left[1 + 2h_N \operatorname{csch}(2h_N) \right]\end{aligned}\quad (2.31)$$

となる。したがって、1次散乱断面積は HF レーダのビーム方向、もしくはその反対方向に伝搬する波数 $2k_0$ の成分波の波浪エネルギーから式(2.30)によって容易に計算できる（付録 A）。

一方、2次散乱断面積は、式(2.27)を式(2.23)に代入し、さらにデルタ関数の制約条件（式(2.24)）と2つの成分波の共鳴条件（式(2.18)）を考慮すると、波向 θ による1変数の非線形積分方程式に変換することができる（Hisaki, 1996）。

$$\sigma_N^{(2)}(\omega_{DN}) = \int_{-\theta_L + \phi_b}^{\theta_L + \phi_b} C_2(\omega_{DN}, \theta_b) S_N(\omega_{N1}, \theta_1) S_N(\omega_{N2}, \theta_2) d\theta\quad (2.32)$$

ここで、 θ_b は、ビーム方向角に対する成分波の相対角である（すなわち、 $\theta_b = \theta - \phi_b$ ）。 $C_2(\omega_{DN}, \theta_b)$ は

$$\begin{cases} C_2(\omega_{DN}, \theta_b) = \left(4\pi |\Gamma_{TN}|^2 \left| \frac{\partial k_{N1}}{\partial y_N} \frac{\partial \omega_{N1}}{\partial k_{N1}} \frac{1}{k_{N2}} \frac{\partial \omega_{N2}}{\partial k_{N2}} \right|_{k_{N1}=k_{N1}} \right) \\ \left| \frac{\partial k_{N1}}{\partial y_N} \right| = \left| m_1 \frac{\partial \omega_{N1}}{\partial k_{N1}} + m_2 \frac{\partial k_{N2}}{\partial k_{N1}} \frac{\partial \omega_{N2}}{\partial k_{N2}} \right|^{-1} \end{cases}\quad (2.33)$$

で表現できる。 \hat{k}_{N1} は式(2.24)を Newton-Raphson 法を用いて数値的に解くことで得られる収束解である（付録 A; Lipa and Barrick, 1986）。式(2.32)の積分区間である θ_L はドップラー角周波数の領域に応じて異なり、以下の値をとる。

$$\theta_L = \begin{cases} \pi, & \text{if } \omega_{DN}^2 \leq \frac{2}{1 + \operatorname{sech}(h_N)} \\ \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{2k_{NE}} \right), & \text{if } \omega_{DN}^2 > \frac{2}{1 + \operatorname{sech}(h_N)} \end{cases}\quad (2.34)$$

k_{NE} は $k_{N1} = k_{N2} = k_{NE}$ 、式(2.24)及び式(2.26)から

$$k_{NE} \tanh(k_{NE} h_N) = \frac{\omega_{DN}^2}{4} \tanh(h_N)\quad (2.35)$$

を満足する波数であり、 $k_{NE} > 1/2$ の範囲をとる（Lipa and Barrick, 1986）。式(2.34)の ω_{DN} の領域は式(2.35)に $k_{NE} = 1/2$ を代入することで得られる。したがって、式(2.32)に基づき、既知の方向スペクトルを用いて波向 θ に関して数値積分すれば、2次散乱断面積を理論的に計算することができる（付録 A）。

2.3 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定法

本研究では、ドップラスペクトルから方向スペクトルを推定するために、Hashimoto and Tokuda (1999) で開発されたベイズ型モデルを用いる。本手法は、方向スペクトルに関する先験条件を満たす方向スペクトルの最適解を赤池ベイズ型情報量基準 (Akaike's Bayesian Information Criterion; ABIC) を用いて決定するものである。

Hashimoto and Tokuda (1999)は、推定された方向スペクトルが非負条件 ($S(f, \theta) > 0$) を満足するように、次式で表現した。

$$S(f, \theta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \exp(x_{i,j}) \delta_{i,j}(f, \theta) \quad (2.36)$$

$$x_{i,j} = \ln S(f_i, \theta_j) \quad (2.37)$$

ここで、 $i(=1, 2, \dots, I)$ 及び $j(=1, 2, \dots, J)$ は、それぞれ周波数と波向の分割番号を意味し、本研究では周波数と波向の分割数を 16 とした (すなわち、 $I=J=16$)。 $\delta_{i,j}(f, \theta)$ はデルタ関数であり、次式を満足する。

$$\delta_{i,j}(f, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } f_i \leq f < f_{i+1} \text{ and } \theta_j \leq \theta < \theta_{j+1} \\ 0 & \text{for others} \end{cases} \quad (2.38)$$

本研究では、Hashimoto and Tokuda (1999) に準じて周波数 f と波向 θ を次のように離散化する。

$$\mu_{i+1} = \ln f_{i+1} = \ln f_i + \Delta\mu, \quad \theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta \quad (2.39)$$

式(2.32)の積分方程式を離散化 (式(A.6)参照) して式(2.36)を代入すれば、式(2.32)は未知数 $\mathbf{x} = (x_{1,1} \cdots x_{i,j} \cdots x_{I,J})^t$ を含む非線形代数方程式になる。なお、添字 t は転置を意味し、以降も同様とする。

一方、式(2.4)に示すように、実際に観測される散乱強度には未知の比例定数 a を含まれる。ドップラスペクトルから方向スペクトルを推定する際、この未知の比例定数 a を除去するため、1次散乱強度で2次散乱強度を無次元化する。

$$d_R(\omega_{DN}) = \sigma_R(\omega_{DN}) \quad (2.40)$$

$$d_R(\omega_{DN}) = \frac{d^{(2)}(\omega_{DN})}{d^{(1)}(\omega_{DN})}, \quad \sigma_R(\omega_{DN}) = \frac{\sigma_N^{(2)}(\omega_{DN})}{\sigma_N^{(1)}(\omega_{DN})} \quad (2.41)$$

ここで、 $d_R(\omega_{DN})$ は観測された散乱強度比、 $\sigma_R(\omega_{DN})$ は式(2.22)及び式(2.23)で理論的に計算される散乱断面積比である。しかし、実際には観測された散乱強度比にはノイズ等の要因により観測誤差が含まれる。この観測誤差を考慮して、ドップラー周波数で離散化すれば、実観測される散乱強度比は次式で表現できる。

$$\mathbf{d} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \mathbf{e} \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} \mathbf{d} = (d_{R1} \cdots d_{Rk} \cdots d_{RK})^t \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) = (\sigma_{R1}(\mathbf{x}) \cdots \sigma_{Rk}(\mathbf{x}) \cdots \sigma_{RK}(\mathbf{x}))^t \\ \mathbf{e} = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \cdots \varepsilon_K)^t \end{cases} \quad (2.43)$$

ここで、 \mathbf{d} 、 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ 及び \mathbf{e} は、それぞれ観測された散乱強度比 d_{Rk} 、理論的に計算できる散乱断面積比 $\sigma_{Rk}(\mathbf{x})$ 及び観測誤差 ε_k を要素にもつベクトルである。各々のベクトル要素の添字 $k(=1, 2, \dots, K)$ は、各ドップラー角周波数の番号である。 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ の要素 $\sigma_{Rk}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = (x_{1,1} \cdots x_{i,j} \cdots x_{I,J})^t$ を未知数とするベクトル関数であり、式(2.32)を数値積分した非線形代数方程式で表される。

今、観測誤差ベクトル \mathbf{e} が、平均ベクトル $\mathbf{0}$ で分散共分散行列が $\alpha^2 \Sigma$ の多次元正規分布に従うものと仮定すると、観測値ベクトル \mathbf{d} の確率密度分布は

$$p(\mathbf{d} | \mathbf{x}, \alpha^2) = (2\pi\alpha^2)^{-K/2} |\Sigma|^{-1/2} \times \exp\left[-(2\alpha^2)^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{s}(\mathbf{x}))^t \Sigma^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{s}(\mathbf{x}))\right] \quad (2.44)$$

となる。ここで、 α^2 は観測誤差の分散共分散のスケールを決めるハイパーパラメータである。また本研究では、観測誤差 ε_k が互に独立であると仮定しているため、分散共分散行列 Σ は単位行列 (すなわち、分散は 1、共分散は 0) となる。

式(2.36)のように離散的な一定値関数を有する指数関数で方向スペクトルを表現したが、現時点で周波数及び波向におけるエネルギーの連続性については何ら考慮されていない。方向スペクトルが不連続なエネルギー分布をしているとは考え難く、滑らかな連続関数であるとみなすことが妥当である。ここで、方向スペクトルが滑らかであるという先験条件を導入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t (\mathbf{D}^t \mathbf{D}) \mathbf{x} = & \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{I-1} \sum_{j=1}^J (x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} - 4x_{i,j})^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^I (x_{1,j-1} + x_{1,j+1} - 2x_{1,j})^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^I (x_{M,j-1} + x_{M,j+1} - 2x_{M,j})^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

なお、 $x_{i,0} = x_{i,j}$ 及び $x_{i,J+1} = x_{i,1}$ である。式(2.45)の値が小さいほど、方向スペクトルの推定値は滑らかになる。そこで、 $\mathbf{D}\mathbf{x}$ が、平均ベクトル $\mathbf{0}$ で分散共分散行列 $\beta^2 \mathbf{E}$ (ここで、 \mathbf{E} は単位行列) の多次元正規分布に従うものと仮定すると、 \mathbf{x} の事前確率分布が得られる。

$$p(\mathbf{x}|\beta^2) = (2\pi\beta^2)^{-L/2} |\mathbf{D}^t \mathbf{D}|^{1/2} \exp\left[-(2\beta^2)^{-1} \mathbf{x}^t (\mathbf{D}^t \mathbf{D}) \mathbf{x}\right] \quad (2.46)$$

ここで、 β^2 は先験条件の分散共分散のスケールを決めるハイパーパラメータであり、 L は方向スペクトルの次元数である（すなわち、 $L=I \times J$ ）。 $\mathbf{D}^t \mathbf{D}$ は $L \times L$ のフルランク行列でなければならない。

ベイズの定理から事後確率分布は、式(2.44)と式(2.46)の確率分布の積に比例する。すなわち、

$$p(\mathbf{x}, \alpha^2, \beta^2 | \mathbf{d}) \propto p(\mathbf{d} | \mathbf{x}, \alpha^2) p(\mathbf{x} | \beta^2) \quad (2.47)$$

式(2.44)及び式(2.46)を式(2.47)に代入し、新たなハイパーパラメータ γ^2 ($=\alpha^2/\beta^2$) を導入すると、事後確率分布は、

$$p(\mathbf{x}, \alpha^2, \gamma^2 | \mathbf{d}) = z^{-1} (\alpha^2)^{-(K+1)/2} (\gamma^2)^{L/2} \exp\left[-(2\alpha^2)^{-1} f(\mathbf{x})\right] \quad (2.48)$$

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{d} - \mathbf{s}(\mathbf{x}))^t \Sigma^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{s}(\mathbf{x})) + \gamma^2 \mathbf{x}^t (\mathbf{D}^t \mathbf{D}) \mathbf{x} \quad (2.49)$$

となる。ここで、 z^{-1} は \mathbf{x} 、 α^2 及び γ^2 とは独立な正規化定数である。また、 γ^2 は観測誤差と先験条件（すなわち、滑らかさ）のバランスを決めるハイパーパラメータであり、 γ^2 が小さくなればなるほど、推定される方向スペクトルは観測誤差を含んだドップラースペクトルに一致するように推定される。これに対して、 γ^2 が大きくなればなるほど、推定される方向スペクトルは先験条件をより反映されたものになり、観測誤差を含んだ実際のドップラースペクトルの値が推定に反映されなくなる。式(2.48)を最大化する \mathbf{x} は、式(2.44)のハイパーパラメータ α^2 に無関係に決まる。したがって、ベイズ型モデル（式(2.47)）の導入により、ドップラースペクトルから波浪の方向スペクトルを推定する問題は、事後確率分布（式(2.48)）を最大化する問題に帰着され、式(2.49)を最小化すればよい。

2.4 最適なハイパーパラメータと最小二乗解の決定

波浪の方向スペクトルを推定するため、式(2.49)に最小二乗法を適用すればよいが、式(2.49)の第一項に \mathbf{x} を未知数とする非線形代数方程式 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ を含み、さらに第二項に未知のハイパーパラメータを γ^2 を含むため、このまま最小二乗法を適用することはできない。ここでは、非線形代数方程式 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ を線形化し、 \mathbf{x} の最尤推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ を得るための最適なハイパーパラメータ $\hat{\gamma}^2$ の決定方法について説明する。

今、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ のまわりで $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ を 1 次の項までテイラー展開すると、

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{s}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{s}'(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.50)$$

となる。ここで、 $\mathbf{s}'(\mathbf{x}_0)$ は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ における $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ の 1 次導関数であり、次式のような $K \times L$ のマトリックスになる。

$$\mathbf{s}'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{R1}}{\partial x_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{R1}}{\partial x_{i,j}} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{R1}}{\partial x_{I,J}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{Rk}}{\partial x_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{Rk}}{\partial x_{i,j}} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{Rk}}{\partial x_{I,J}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{RK}}{\partial x_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{RK}}{\partial x_{i,j}} & \cdots & \frac{\partial \sigma_{RK}}{\partial x_{I,J}} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (2.51)$$

式(2.50)を式(2.49)に代入すると、

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}\mathbf{x})^t \Sigma^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{a}\mathbf{x}) + \gamma^2 \mathbf{x}^t (\mathbf{D}^t \mathbf{D}) \mathbf{x} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{s}'(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{s}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{s}'(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.53)$$

と書き直す事ができる。

次に、式(2.52)の最小二乗解はハイパーパラメータ γ^2 に依存するため、 \mathbf{x} の最尤推定量を決めるためには最適なハイパーパラメータ $\hat{\gamma}^2$ を決定する必要がある。 $\hat{\gamma}^2$ を決定するための判断基準として、次式の Akaike(1980)の赤池ベイズ型情報量基準 (ABIC) を用いた。

$$ABIC = -2 \ln L(\alpha^2, \gamma^2) \quad (2.54)$$

$$L(\alpha^2, \gamma^2) = \int p(\mathbf{x}, \alpha^2, \gamma^2 | \mathbf{d}) d\mathbf{x} \quad (2.55)$$

すなわち、式(2.54)の ABIC を最小にするハイパーパラメータを求めればよい。Yabuki and Matsu'ura (1992)によると、あるハイパーパラメータを用いた場合の式(2.52)の最小二乗解を $\hat{\mathbf{x}}$ と表記すると、式(2.52)を以下のように書き換えることができる。

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^t \mathbf{c} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (2.56)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^{-1} \mathbf{a}^t \Sigma^{-1} \mathbf{b} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{c} = (\mathbf{a}^t \Sigma^{-1} \mathbf{a} + \gamma^2 \mathbf{D}^t \mathbf{D}) \quad (2.58)$$

このとき式(2.48)の事後確率分布は、平均 $\hat{\mathbf{x}}$ 、分散共分散行列 $\alpha^2 \mathbf{c}^{-1}$ の多次元正規分布に従う。式(2.48)を式(2.55)に代入すると、式(2.55)の右辺は解析的に積分可能であり、

$$L(\alpha^2, \gamma^2) = z^{-1} (\alpha^2)^{-K/2} (\gamma^2)^{L/2} |\mathbf{c}|^{-1/2} \exp\left[-(2\alpha^2)^{-1} f(\hat{\mathbf{x}})\right] \quad (2.59)$$

となる。なお、式(2.55)の右辺の積分では以下の積分公式を用いた。

$$\int \exp\left[-(2\alpha^2)^{-1}(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})^t \mathbf{c}(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})\right] d\mathbf{x} = (\alpha^2)^{L/2} |\mathbf{c}|^{-1/2} \quad (2.60)$$

ABIC の最小化は, $L(\alpha^2, \gamma^2)$ を最大化すればよく, その必要条件は,

$$\partial L(\alpha^2, \gamma^2) / \partial \alpha^2 = 0 \quad (2.61)$$

$$\partial L(\alpha^2, \gamma^2) / \partial \gamma^2 = 0 \quad (2.62)$$

である. ここで, 式(2.59)を式(2.61)に代入すると,

$$\alpha^2 = f(\hat{\mathbf{x}}) / K \quad (2.63)$$

を得ることができ, これを式(2.59)に代入すると,

$$L(\alpha^2, \gamma^2) = z^{-1} (f(\hat{\mathbf{x}}) / K)^{-K/2} (\gamma^2)^{L/2} |\mathbf{c}|^{-1/2} \exp[-K/2] \quad (2.64)$$

となる. この方程式を式(2.62)の必要条件を用いて解くことができれば, ABIC を最小化する最適ハイパーパラメータ $\tilde{\gamma}^2$ を得られる. しかしながら, 式(2.64)の方程式は非線形であるため, 解析的に解くことができない. そこで, 式(2.64)を式(2.54)に代入した次式を数値的に最小化することで最適なハイパーパラメータ $\tilde{\gamma}^2$ を決定する.

$$ABIC = K \ln f(\hat{\mathbf{x}}) - L \ln \gamma^2 + \ln |\mathbf{c}| + C \quad (2.65)$$

ここで, C は γ^2 に依存しない定数である. 以上の最小二乗解 $\hat{\mathbf{x}}$ 及び ABIC の具体的な計算方法は付録 B に詳説する. 本研究では, Hashimoto and Tokuda(1999)と同様に次式のモデルを用いた逐次計算により ABIC を最小にする最適ハイパーパラメータ $\tilde{\gamma}^2$ を決定した.

$$\gamma = 0.1 \times 0.5^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.66)$$

決定した $\tilde{\gamma}^2$ を式(2.57), 式(2.58)及び式(2.63)に代入することで, \mathbf{x} , \mathbf{c} 及び α^2 の最尤推定値 $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{c}}$ 及び $\hat{\alpha}^2$ のを得ることができる. このようにして得られた最尤推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ を式(2.36)に代入することで, 方向スペクトルの最尤推定値が決定される.

3. 数値実験

本章ではまず浅海域で観測されたドップラースペクトルに BIM_{deep} を適用することで, 深海波仮定に基づく推定精度への影響を把握し, BIM_{deep} の適用範囲を明らかにする (実験 1). 次に BIM_{shallow} で HF レーダのビーム交差角による浅海波の方向スペクトルの推定精度への影響を調べる (実験 2). 数値実験のフローを図-3.1 に示す. ステップ 1 としてモデル波浪の方向スペクトルを既往の経験式から計算し, これを求める

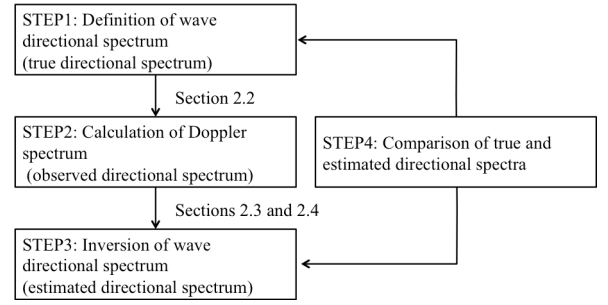


図-3.1 数値実験のフロー

べき方向スペクトル (真値) とする. ステップ 2 ではモデル波浪の方向スペクトルから式(2.30)及び式(2.32)を用いてドップラースペクトルを計算し, これを観測値とする. ステップ 3 で観測値としたドップラースペクトルからベイズ法 (実験 1 では BIM_{deep} , 実験 2 では BIM_{shallow}) により方向スペクトルを推定する. 最後に, 方向スペクトルの真値と推定値を比較することで, 実験 1 により深海波仮定による浅海域での方向スペクトルの推定精度への影響やその適用範囲, 並びに実験 2 により HF レーダのビーム交差角による方向スペクトルの推定精度への影響について考察する.

3.1 モデル波浪の方向スペクトルと 2 次散乱

方向スペクトルは, Bretschneider-Mitsuyasu 型スペクトル (光易, 1970) と Mitsuyasu et al. (1975) が提案する方向分布関数を用いて作成した. 一般に, 方向スペクトル $S(f, \theta)$ は, 周波数スペクトルと方向分布関数の積で表現される.

$$S(f, \theta) = S_f(f) G(\theta | f) \quad (3.1)$$

ここで, $S_f(f)$ は周波数スペクトルであり, $G(\theta | f)$ は方向分布関数である. f 及び θ はそれぞれ波浪の周波数と波向である. 光易 (1970) は Bretschneider が提案する風波のスペクトルの係数を現地観測データに基づいて修正し, Bretschneider-Mitsuyasu 型スペクトルとして次式を提案している.

$$S_f(f) = 0.257 H_s^2 T_s (T_s f)^{-5} \exp\left[-1.03 (T_s f)^{-4}\right] \quad (3.2)$$

ここで, H_s 及び T_s は, それぞれ有義波の波高及び周期を意味する. 一方, Mitsuyasu et al. (1975) は方向分布関数の標準形として次式を提案する.

$$G(\theta | f) = G_0 \cos\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right)^{25} \quad (3.3)$$

θ_0 は波浪の主波向を意味し, G_0 は正規化条件

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f)d\theta=1 \quad (3.4)$$

を満たすための定数であり, 一般には,

$$G_0 = \left[\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) d\theta \right]^{-1} \quad (3.5)$$

で定義される. 式(3.5)で全波向 ($(\theta_{\min}, \theta_{\max}) = (-\pi, \pi)$) を対象とするならば, G_0 は次式となる.

$$G_0 = \frac{1}{\pi} 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \quad (3.6)$$

ここで, s は波浪エネルギーの方向集中度を決めるパラメータであり, s の最大値 s_{\max} を主パラメータとして次式で定義される (合田, 2008) .

$$s = \begin{cases} s_{\max} (f/f_p)^5 & f \leq f_p \\ s_{\max} (f/f_p)^{-2.5} & f > f_p \end{cases} \quad (3.7)$$

f_p は周波数スペクトルのピーク周波数であり, 有義波周期を用いて $f_p = (1.05T_s)^{-1}$ と定義される. したがって, 4 つのパラメータ (すなわち, H_s , T_s , s_{\max} 及び θ_0) を任意に設定することで, 式(3.1), 式(3.2)及び式(3.3)から様々な方向スペクトルを計算することができる.

これら 4 つのパラメータのうち, H_s , s_{\max} 及び θ_0 はそれぞれ 1 m, 10 及び 0° (波向は波が観測点に襲来する方向であり, 真北から時計回りの角度を意味する) で固定し, T_s は 3s, 5s, 10s の 3 ケースを設定し, 方向

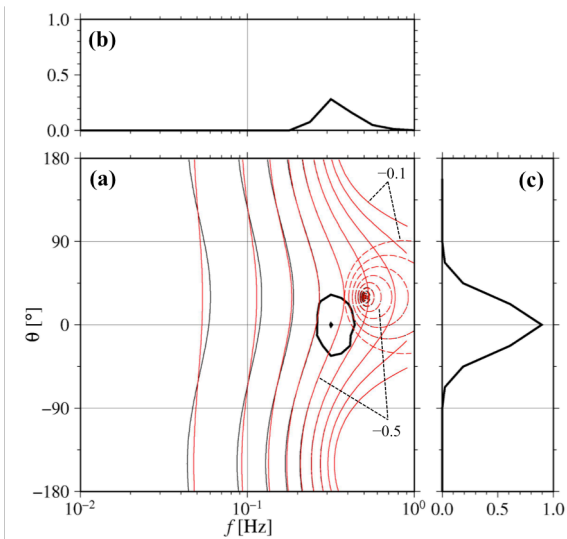


図-3.2 モデル波浪スペクトル ($T_s = 3$ s の場合) . (a) 方向スペクトル, (b) 周波数スペクトル, (c) 方向分布関数

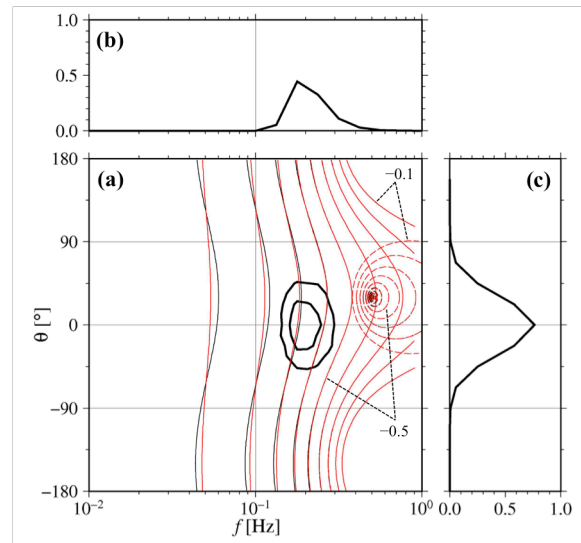


図-3.3 モデル波浪スペクトル ($T_s = 5$ s の場合) . (a) 方向スペクトル, (b) 周波数スペクトル, (c) 方向分布関数

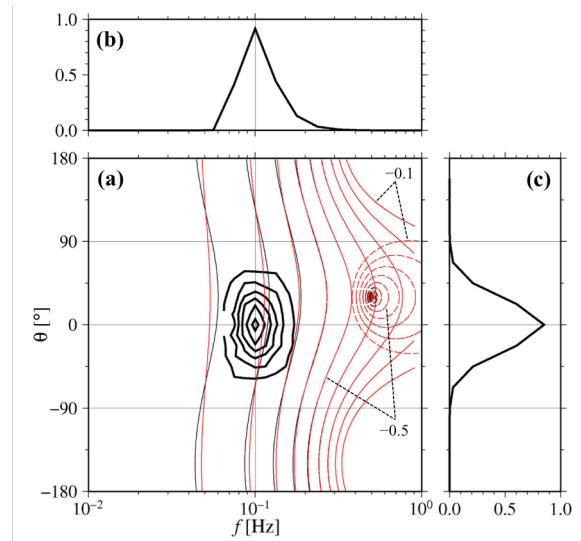


図-3.4 モデル波浪スペクトル ($T_s = 10$ s の場合) . (a) 方向スペクトル, (b) 周波数スペクトル, (c) 方向分布関数

スペクトルを計算した (図-3.2-図-3.4) . 図-3.2-図-3.4 中の(a)が方向スペクトル, (b)が周波数スペクトル, (c)がピーク周波数 (すなわち, 式(3.7)における $f = f_p$) における方向分布関数である. さらに, 計算された方向スペクトルを式(2.32)に代入して 2 次散乱断面積を計算した (図-3.5-図-3.7) . 国内にある多くの HF レーダはアジマス方向の分解能は 7.5° であることから, HF レーダのビーム方向角を真北から 7.5° 間隔で設定し, $48 (= 360/7.5)$ パターンの 2 次散乱断

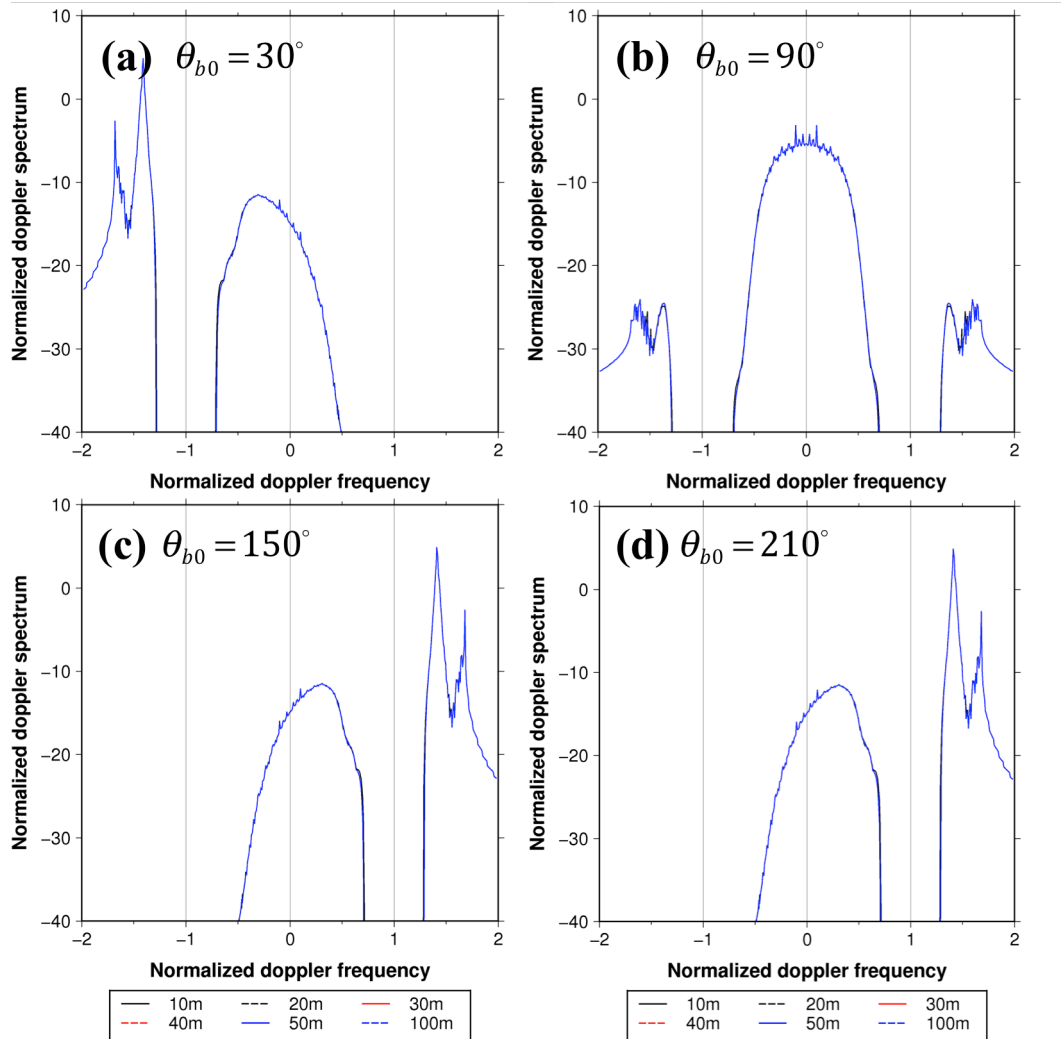


図-3.5 観測水深に対するドップラーспекトルの依存性 ($T_s=3$ s の場合)

面積を計算した。さらに、2次散乱断面積の水深依存性を知るために、観測水深を10m, 20m, 30m, 40m, 50m及び100mの6パターンとした。図-3.5-図-3.7には、主波向 θ_0 とビーム方向角 ϕ_b との相対角 θ_{b0} を(a) $\theta_{b0}=30^\circ$ 、(b) $\theta_{b0}=90^\circ$ 、(c) $\theta_{b0}=150^\circ$ 及び(d) $\theta_{b0}=210^\circ$ の場合の2次散乱断面積を示しており、設定した観測水深に応じて線色を変えている。波向は波浪が観測点に襲来してくる方向を意味し、ビーム方向角はHFレーダから放射された電波が観測点に伝達してくる方向であり、いずれも真北から時計回りの角度である。なお、図-3.5-図-3.7では、2次散乱のみを示しており、1次散乱は示していないが、本来実観測では $\omega_{DN}=\pm 1$ に1次散乱が生じる。

ドップラーспекトルの形状は、式(2.32)からもわかるように主波向 θ_0 とビーム方向角 ϕ_b との相対角 $\theta_{b0} (= \theta_0 - \phi_b)$ に依存する。本研究では、 $\theta_0=0^\circ$ の場合

を想定しているため、 θ_{b0} は ϕ_b に相当する(すなわち、 $\theta_{b0}=\phi_b$)。図-2.2に示すように、基本的にレーダ局から遠ざかる(レーダ局に近づく)波に起因する2次散乱は、負(正)のドップラー周波数の領域に生じる。したがって、図-3.5-図-3.7において $\theta_{b0}=30^\circ$ の場合、2次散乱のピークは負のドップラー周波数領域に生じる。逆に $\theta_{b0}=210^\circ$ の場合、それは正のドップラー周波数領域に生じ、 $\theta_{b0}=30^\circ$ の場合の2次散乱断面積を $\omega_{DN}=0$ の軸に対して反転させた鏡像となる(図-3.5-図-3.7中の(d))。 $\theta_0=0^\circ$ の場合、 $\theta_{b0}=150^\circ$ のドップラーспекトルは $\theta_{b0}=210^\circ$ のそれと完全に一致する(図-3.5-図-3.7中の(c))。一方、 $\theta_{b0}=90^\circ$ の場合、左右対称な2次散乱断面積となる(図-3.5-図-3.7中の(b))。

また、有義波周期 T_s が長くなると、観測水深に対する2次散乱の依存性が大きくなる。例えば、 $T_s=3$ sの場合、観測水深による2次散乱の依存性は認められな

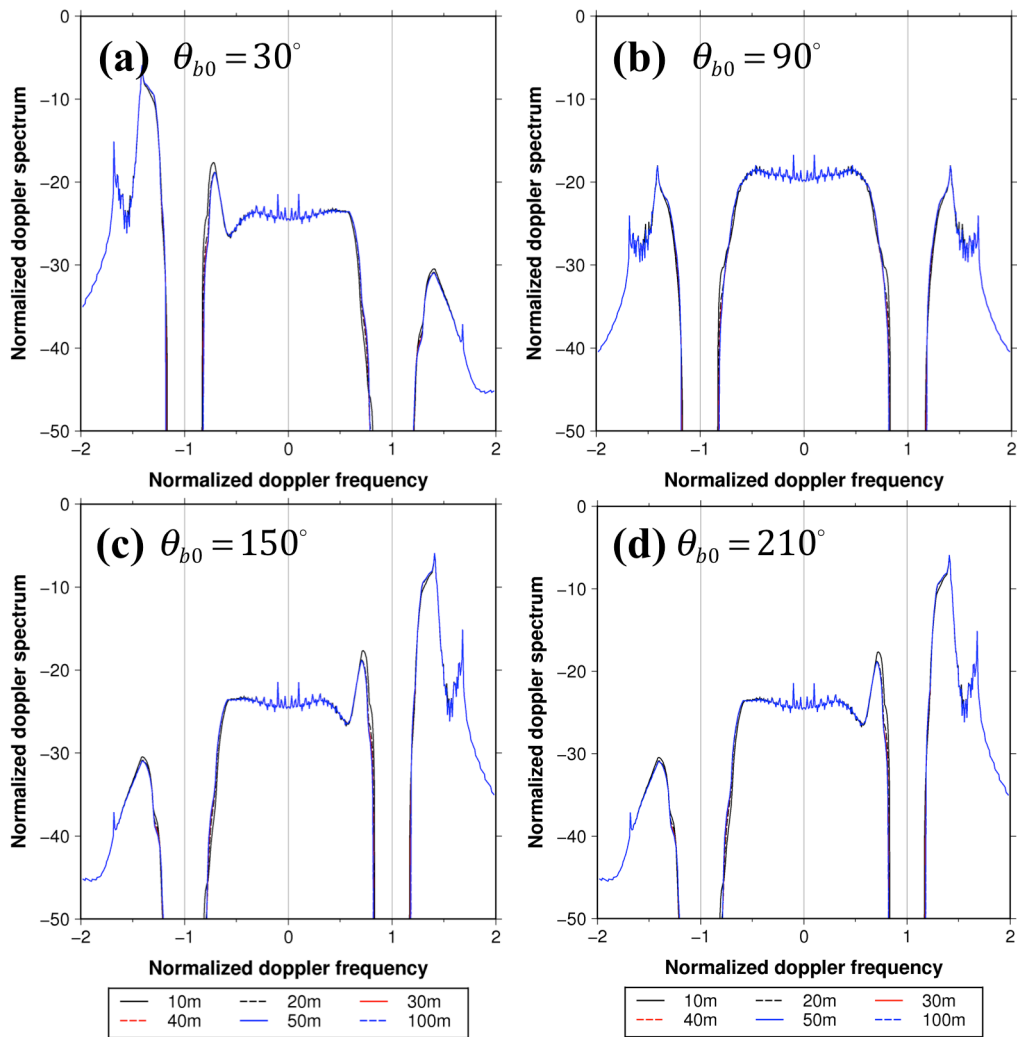


図-3.6 観測水深に対するドップラースペクトルの依存性 ($T_s=5$ s の場合)

いが、 $T_s=10$ s の場合、2 次散乱は観測水深に依存して大きく変化する。図-3.2-図-3.4 の(a)に $-1 < \omega_{DN} < 0$ の範囲におけるドップラー角周波数 ω_{DN} の等値線を示す。この等値線は $-1 < \omega_{DN} < 0$ の範囲の 2 次散乱断面積を計算する際の積分経路に相当する。実線及び破線は、それぞれ波数 k_{N1} 及び k_{N2} の成分波の積分経路を意味し、黒線及び赤線は、それぞれ $h=10$ m 及び $h=100$ m の場合の積分経路である。2 次散乱断面積を計算する際の積分経路は、 $-0.5 < \omega_{DN} < 0$ の範囲では観測水深に依存しないが、 $-1 < \omega_{DN} \leq -0.5$ の範囲では観測水深に依存して変化する(図-3.2-図-3.4 中の(a))。これは、 $-1 < \omega_{DN} \leq -0.5$ の 2 次散乱に寄与する成分波の周波数が小さい(波長が長い)ためである。 $T_s=3$ s の場合、 $-0.5 < \omega_{DN} < 0$ の場合の積分経路上に方向スペクトルのピークがあり、 $-1 < \omega_{DN} \leq -0.5$ の場合の積分経路上の方向スペクトル値は小さいため、観測水深に対する依

存性が小さくなる(図-3.2(a))。これに対し、 $T_s=10$ s の場合は $-1 < \omega_{DN} \leq -0.5$ の積分経路上に方向スペクトルのピークがある(図-3.4(a))。その結果、観測水深に依存して $-1 < \omega_{DN} \leq -0.5$ の範囲における 2 次散乱断面積は変化する(図-3.7)。

2 次散乱断面積が観測水深に依存するか否かは、襲来する波浪の有義波周期から見積もられた深海域での波長 λ_d と観測水深 h の比(相対水深; h/λ_d) で概ね判断できる(表-3.1)。一般に、相対水深が 0.5 より大きくなる場合 ($h/\lambda_d > 0.5$) を深海波と定義する(例えば、合田, 2008)。 $T_s=3$ s の場合、どの観測水深でも深海波とみなされるため、2 次散乱断面積は観測水深に依存しない(図-3.5)。 $T_s=5$ s の場合、 $h=10$ m では浅海波となるため、観測水深に依存して 2 次散乱断面積が変化する(図-3.6)。さらに、有義波周期が長い $T_s=10$ s の場合、深海波とみなすことができるのは、

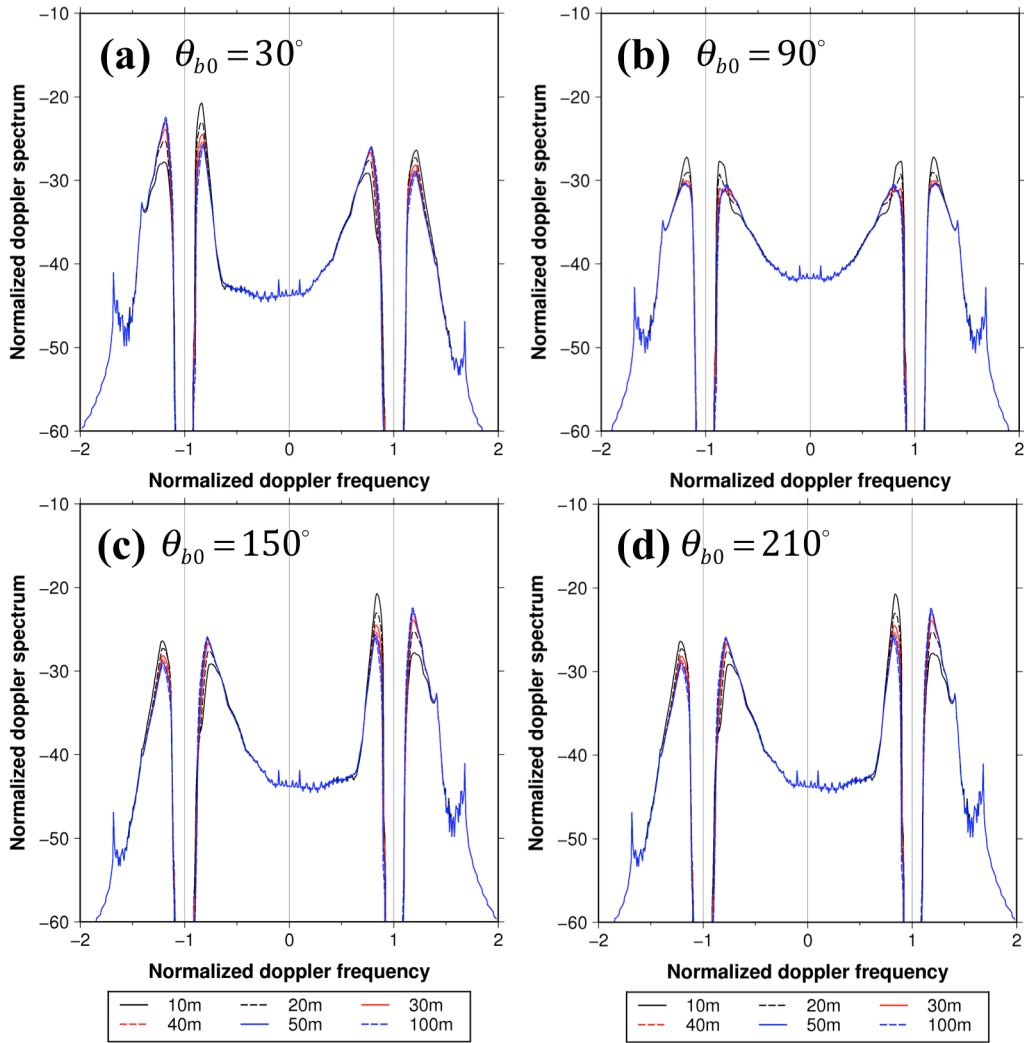


図-3.7 観測水深に対するドップラーспекトルの依存性 ($T_s=10$ s の場合)

表-3.1 深海波の波長に対する相対水深

| h [m] | h/λ_d | | |
|---------|---------------|--------------|--------------|
| | $T_s = 3$ s | $T_s = 5$ s | $T_s = 10$ s |
| 10 | 0.712 | 0.256 | 0.064 |
| 20 | 1.424 | 0.513 | 0.128 |
| 30 | 2.136 | 0.769 | 0.192 |
| 40 | 2.848 | 1.025 | 0.256 |
| 50 | 3.559 | 1.281 | 0.320 |
| 100 | 7.119 | 2.563 | 0.641 |

$h=100$ m のみであり、それ以外は浅海波とみなされるため、2次散乱断面積が観測水深に依存して変化する(図-3.7)。このことから、深海波の波長に対する相対水深が $h/\lambda_d \leq 0.5$ の場合、2次散乱断面積は観測水深に依存して変化するようになる。

3.2 深海波仮定による方向スペクトルの推定精度への影響

深海波を仮定すると、ドップラーспекトルの基礎式(すなわち、式(2.5)及び式(2.6))は、 $h \rightarrow \infty$ として次式で書き直すことができる。

$$\sigma^{(1)}(\omega_D) = 2^6 \pi k_0^4 S(-2m_2 \mathbf{k}_0) \delta(\omega_D - m_2 \sqrt{2gk_0}) \quad (3.9)$$

$$\sigma^{(2)}(\omega_D) = 2^6 \pi k_0^4 \sum_{m_1=\pm 1} \sum_{m_2=\pm 1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Gamma}_T|^2 S(m_1 \mathbf{k}_1) S(m_2 \mathbf{k}_2) \times \delta(\omega_D - \hat{y}) dk_x dk_y \quad (3.10)$$

となる。ここで、式(3.10)中の $\hat{\Gamma}_T$ は $h \rightarrow \infty$ の場合の結合係数を意味し、式(2.13)–式(2.15)から

$$\hat{\Gamma}_T = \hat{\Gamma}_E + i\hat{\Gamma}_H \quad (3.11)$$

$$\hat{\Gamma}_E = \frac{1}{2} \left[\frac{(\mathbf{k}_{d1} \cdot \mathbf{k}_0)(\mathbf{k}_{d2} \cdot \mathbf{k}_0)/k_0^2 - 2\mathbf{k}_{d1} \cdot \mathbf{k}_{d2}}{(\mathbf{k}_{d1} \cdot \mathbf{k}_{d2})^{1/2} - k_0 \Delta} \right] \quad (3.12)$$

$$\hat{\Gamma}_H = -\frac{1}{2} \left\{ k_{d1} + k_{d2} + \frac{\mathbf{k}_{d1} \cdot \mathbf{k}_{d2} - k_{d1} k_{d2} \left(\frac{\omega_D^2 + \omega_B^2}{\omega_D^2 - \omega_B^2} \right)}{m_1 m_2 (k_{d1} k_{d2})^{1/2}} \right\} \quad (3.13)$$

となり，また式(2.6)のデルタ関数内の y は $h \rightarrow \infty$ の場合，

$$\hat{y} = m_1 \sqrt{gk_1} + m_2 \sqrt{gk_1} \quad (3.14)$$

となる．式(3.9)及び式(3.10)を式(2.42)に代入してベイズ型モデルで方向スペクトルを推定する手法が Hashimoto and Tokuda (1999)の開発した BIM_{deep} である．前節で述べたように，2 次散乱断面積は観測水深が浅くなる（あるいは，有義波周期が長くなる）につれてブラッグ散乱周波数（すなわち， $|\omega_{DN}|=1$ ）の両側のドップラースペクトルの 2 次散乱断面積が変化する．そのため，浅海域において BIM_{deep} を適用した場合，方向スペクトルの推定精度が悪化すると推察される．

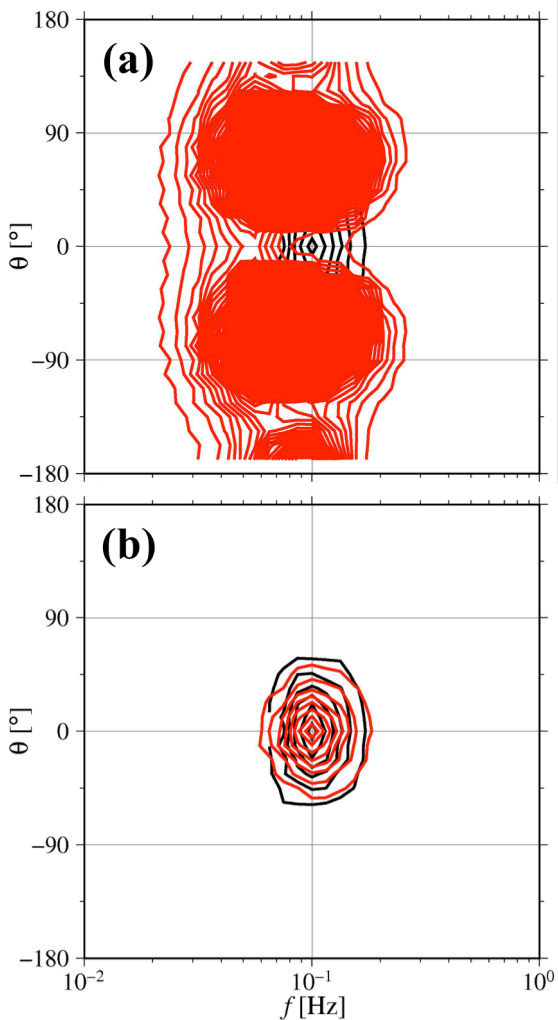


図-3.8 BIM_{deep} による方向スペクトルの推定結果.
(a) $h=10$ m , (b) $h=100$ m

ここでは 6 パターンの水深（10 m, 20 m, 30 m, 40 m, 50 m 及び 100 m）におけるドップラースペクトル（図-3.5-図-3.7）を観測値（すなわち，式(2.42)中の \mathbf{d} ）として用いることで，相対水深に対する方向スペクトルの推定精度の依存性を調べ，BIM_{deep} の適用範囲を明らかにする．なお，本節の数値実験では，ビーム方向角が 30°と 150°の場合のドップラースペクトルを用いた（図-3.5-図-3.7 中の(a)と(c)）．

図-3.8 に $T_s=10$ s の場合のドップラースペクトル（図-3.7）から推定した方向スペクトルとその真値との比較の一例を示す． $h=10$ m の場合，相対水深 ($h/\lambda_d=0.064$; 表-3.1 参照) は 0.5 未満であり，計算が発散して適切な方向スペクトルが推定されていない（図-3.8(a)）．一方， $h=100$ m の場合，相対水深 ($h/\lambda_d=0.641$; 表-3.1 参照) は 0.5 以上であり，推定された方向スペクトルは比較的妥当な値となった（図-3.8(b)）．

図-3.9 に推定された方向スペクトルから計算した有義波高（図-3.9(a)），有義波周期（図-3.9(b)）及び主波向（図-3.9(c)）の推定結果と相対水深との関係を示す．図-3.9(a)及び図-3.9(b)の縦軸は真値と推定値

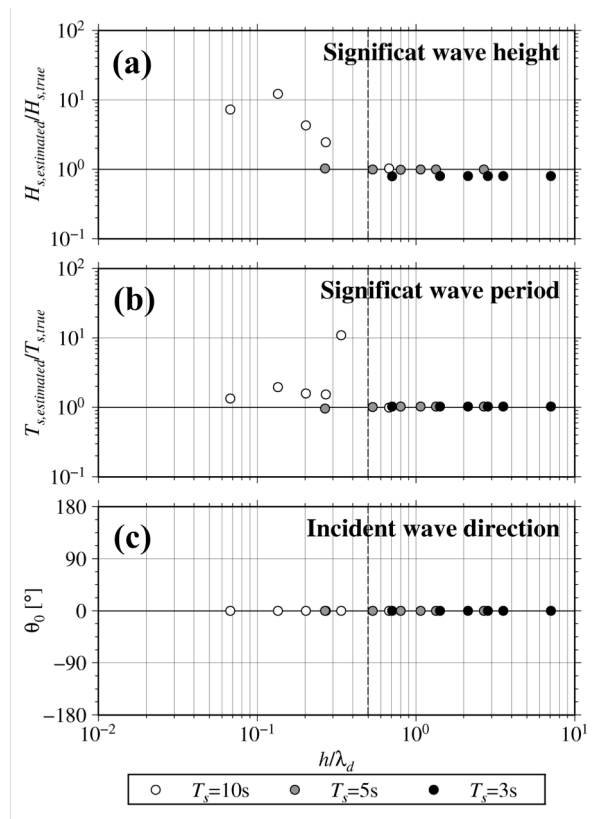


図-3.9 BIM_{deep} に基づく波浪統計量の推定結果. (a) 有義波高, (b) 有義波周期, (c) 主波向

の比であり，推定値が真値と一致していれば 10^0 となる．丸印の色はドップラースペクトルの観測値を計算したときに設定した有義波周期を意味し，例えば白丸は $T_s=10\text{s}$ の方向スペクトルから計算したドップラースペクトル（図-3.7(a)と(c)）を観測値として用いた場合の推定結果である．有義波高及び周期の推定値は，方向スペクトルから次式で算定した（合田，2008）．

$$H_s = 4.0\sqrt{E_0} \quad (3.15)$$

$$T_s = 1.2E_0/E_1 \quad (3.16)$$

ここで， E_0 は 0 次スペクトルモーメント， E_1 は 1 次スペクトルモーメントであり，次式で定義される．

$$E_n = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi f^n S(f, \theta) d\theta df, \quad n=0,1 \quad (3.17)$$

また，主波向はピーク周波数 f_p における方向分布関数から次式で見積もった．

$$\theta_0 = D_0/D_1 \quad (3.18)$$

$$D_n = \int_{-\pi}^\pi \theta^n G(\theta|f_p) d\theta, \quad n=0,1 \quad (3.19)$$

$h/\lambda_d < 0.5$ の場合（図-3.9 の破線の左），有義波高及び有義波周期が過大になるのに対し， $h/\lambda_d \geq 0.5$ の場合（図-3.9 の破線の右），良好な推定値が得られている．主波向は h/λ_d に依存せず，真値（ $\theta_0=0$ ）とほぼ同等になっているが，これはピーク周波数における方向分布関数が $\theta=0$ の軸に対して対称となったためである．実際には， $h/\lambda_d < 0.5$ の場合，図-3.8(a)に示すように 2 つのピークを有する方向分布関数が推定され，波向に関しても推定精度が悪化した．従って，浅海域における BIM_{deep} による方向スペクトルの推定精度は，深海波の波長に対する相対水深 h/λ_d に依存し，本節の数値実験に基づくと， $h/\lambda_d < 0.5$ となる浅海域では方向スペクトルの推定精度が悪くなる傾向がある．ただし，有義波周期 $T_s=5\text{s}$ かつ観測水深 $h=10\text{m}$ の場合のように， $h/\lambda_d=0.256 < 0.5$ にも関わらず，比較的良好的な推定結果が得られた．これは観測水深に対するドップラースペクトルの依存性が比較的小さいためであると考えられる（図-3.6）．このように波浪条件によっては， $h/\lambda_d < 0.5$ で BIM_{deep} を適用しても精度よく推定できる．

3.3 ビーム交差角による推定精度への影響

次に 3.1 で計算したドップラースペクトルの内，ビーム方向角が異なる 2 つのドップラースペクトルを用いて $\text{BIM}_{\text{shallow}}$ で波浪の方向スペクトルを推定するこ

とで，ビーム交差角による方向スペクトルの推定精度の依存性を調べた．なお， $T_s=10\text{s}$ 及び $h=10\text{m}$ とした場合に計算されたドップラースペクトルを観測値として用いた．本研究では，ビーム方向角を真北から 7.5° 間隔で設定して計算された 48 パターンのドップラースペクトルを用いて，全 1128 組（ ${}_{48}C_2=1128$ ）のドップラースペクトルから方向スペクトルを推定した．

図-3.10 は推定された方向スペクトルから式(3.15)で計算した有義波高（図-3.10(a)），式(3.16)で計算した有義波周期（図-3.10(b)）及び方向分布関数から式(3.18)で計算した主波向（図-3.10(c)）の推定精度のビーム交差角に対する依存性を示す．また，図-3.11 には推定された方向スペクトルの真値（黒線）と推定値（赤線）の比較の一例を示す．図-3.10 及び図-3.11 が示すように，有義波高及び有義波周期の推定精度はビーム交差角に依らず，どのビーム交差角であっても適切に方向スペクトルを推定することができる．一方，ビーム交差角が 90° の場合に最も主波向の推定値のばらつきが小さく，ビーム交差角が狭くなる（あるいは，広くなる）に従って，ばらつきが若干大きくなる．このように主波向（あるいは方向分布関数）の推定精度はビーム交差角に対する依存性が多少認められるが，ビーム交差角が 180° の場合を除いてどのビーム交差

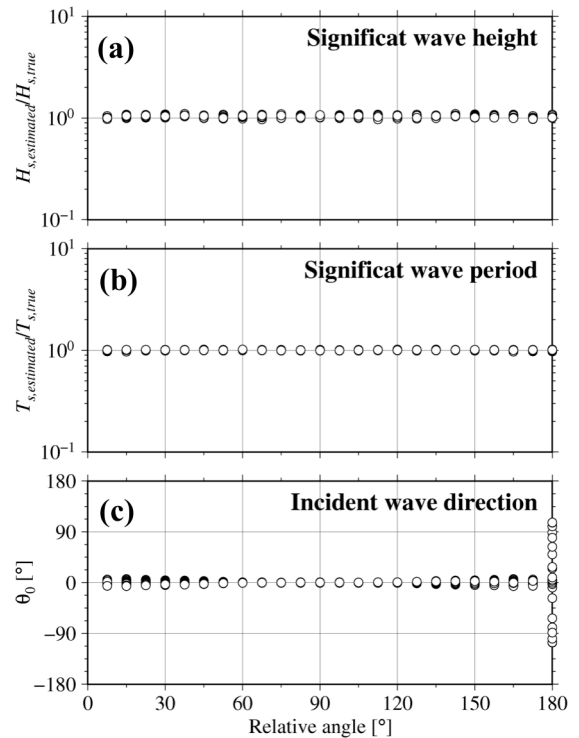


図-3.10 ビーム交差角と波浪統計量の推定精度の関係．(a) 有義波高，(b) 有義波周期，(c) 主波向

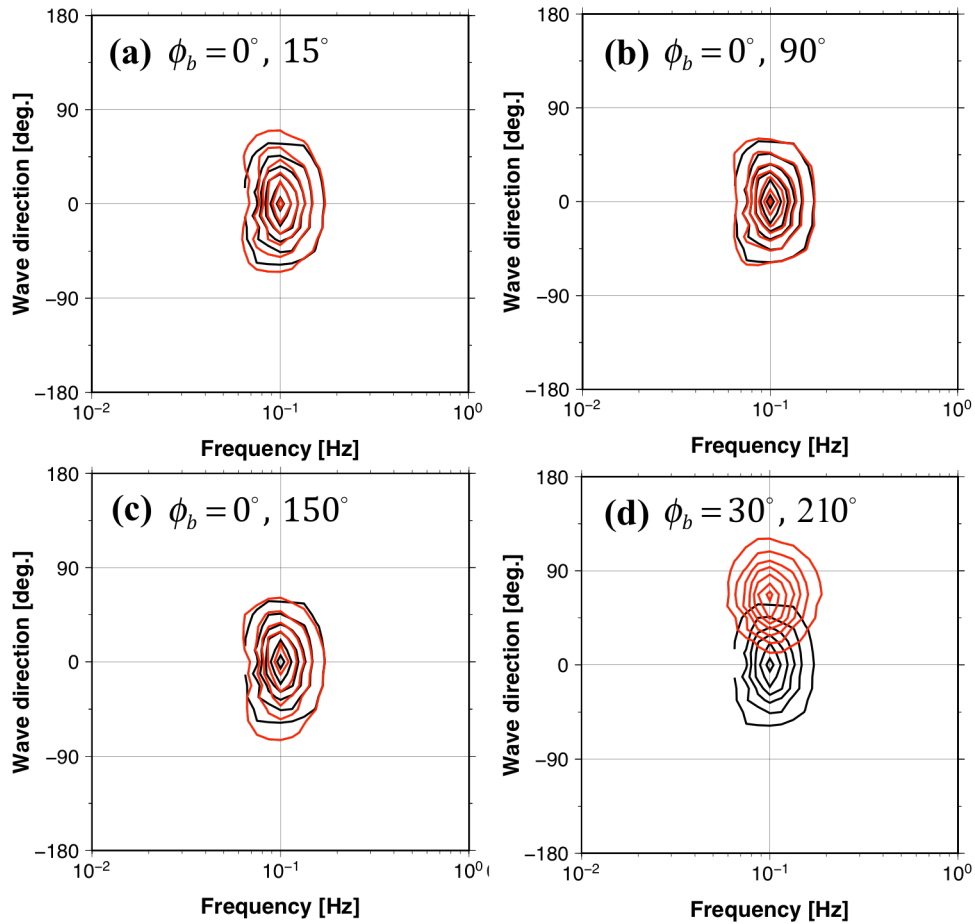


図-3.11 ビーム交差角が方向スペクトルの推定結果に及ぼす影響（黒線: 真値, 赤線: 推定値）.
 (a) ビーム交差角: 15° , (b) ビーム交差角: 90° , (c) ビーム交差角: 150° , (d) ビーム交差角: 180°

角であっても実用的に十分な精度で推定できている。ただし、ビーム交差角が 180° の場合、有義波高及び有義波周期は適切に推定されているが、主波向及び方向分布関数の推定精度は著しく悪くなる（図-3.10(c)及び図-3.11(d)）。これはビーム交差角が 180° の場合、両ビームは平行になり、結局のところ単一のビーム方向の情報しか含まれないためである。

従って、 BIM_{shallow} による方向スペクトルの推定精度のビーム交差角に対する依存性は低く、ビーム交差角が 7.5° 以上であれば、方向スペクトル及び波浪統計量を精度よく推定できる。

4. 考察

HF レーダの実観測において方向スペクトルの推定がビーム交差角に依らないことは広域に方向スペクトルを取得するのに有用である。例えば、図-3.12 のような 2 局の HF レーダによる観測範囲を仮定する。赤

色の領域が 1 局での観測範囲、黒の領域が 2 局での観測範囲を意味する。国内のレーダの多くは、アジマス方向の分解能が 7.5° である。そのため、図-3.10 の結果は、1 局しか観測されていない範囲（図-3.12 の赤い範囲）であっても、同レンジで隣り合うビームで観測されたドップラースペクトルを用いることで、方向スペクトルの推定可能であることを意味する。一般にレーダ局に近いレンジでは受信信号が強く、2 次散乱が明瞭になる。そのため、レーダ局に近いレンジにおいては、隣り合うビームで観測されたドップラースペクトルを用いて方向スペクトルを推定し、それを初期値に次のレンジの方向スペクトルを推定する（図-3.12）ことで、1 局でしか観測されていない範囲であっても方向スペクトルを精度よく推定できると考えられる。ただし、レンジ距離が遠くなると、隣り合うビーム上の観測点は離れるため、それらを用いて一つの方向スペクトルを推定する場合には、その推定精度を十分に留意する必要がある。今後、HF レーダの実観測データを用いてここで

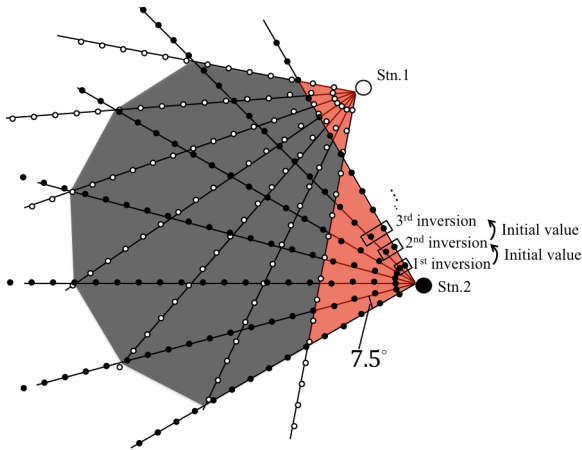


図-3. 12 局の HF レーダによる波浪観測範囲

提案する単局の隣り合うビームによる方向スペクトルの推定精度を確認する予定である。

5. 結論

本研究では、我が国に配備される短波海洋（HF）レーダでの波浪観測の実用化を図るため、Hashimoto and Tokuda(1999)が開発したベイズ型モデルに基づく方向スペクトルの推定法（ BIM_{deep} ）を浅海域にも適用できるもの（ $BIM_{shallow}$ ）に改良した。さらに、数値実験に基づき、 BIM_{deep} による方向スペクトルの推定精度への影響や HF レーダのビーム交差角が方向スペクトルの推定精度に及ぼす影響について調べ、以下の結論を得た。

- (1) BIM_{deep} による方向スペクトルの推定精度は、深海波の波長に対する相対水深に依存するため、同一観測点（観測水深）であっても襲来する波浪の波長によって推定精度が依存する。特に、相対水深が 0.5 以下となる浅海域において悪化し、異常な波浪統計量が推定される傾向がある。
- (2) ビーム交差角が 7.5° 以上であれば、方向スペクトルの推定結果はビーム交差角にほとんど依存せず、実用的に十分な精度で方向スペクトルを推定することが可能である。ただし、単一のビームもしくはビーム交差角が 180° の場合、有義波高及び有義周期は良好な推定結果が得られるが、方向分布関数の推定精度が悪くなる。
- (3) 本研究による検討は、HF レーダによる波浪観測は、単局の同レンジで観測された隣り合うビームのドップラースペクトルを用いることで、方向スペクトルの推定が可能であることを示唆する。一般にレーダ局に近いレンジでは受信信号が強く、2 次散乱が明瞭である。そのため、レーダ局に近いレンジにお

いて隣り合うビームで観測されたドップラースペクトルを用いて方向スペクトルを推定し、それを初期値に次のレンジの方向スペクトルを推定することで、HF レーダ 1 局 であっても方向スペクトルの推定が可能であると推察される。今後、閉鎖性内湾に配備される HF レーダの実観測データに $BIM_{shallow}$ を適用し、方向スペクトルの推定精度を把握する予定である。

(2016 年 2 月 15 日受付)

謝辞

本研究を実施するにあたり、ベイズ型モデルを用いた海洋波の方向スペクトル推定法に関して九州大学工学研究院附属アジア防災研究センター橋本典明教授に、ベイズの定理及びその解法に関して港湾空港技術研究所海洋情報・津波研究領域高川智博博士に有意義なご助言をいただいた。ここに記し、深甚なる謝意を表する。

参考文献

- Akaike, H. (1980): Likelihood and the Bayes procedure, in Bayesian Statics, eds. Bernardo, J. M., DeGroot, M. H., Lindley, D. V. and Smith, A. F. M., University Press, Valencia, Spain, pp.143-166.
- Barrick, D. E. (1972): Remote sensing of sea state by radar, in Remote Sensing of the Troposphere, ed. Derr, V. E., U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., USA.
- Barrick, D. E. (1977): Extraction of wave parameters from measured HF radar sea - echo Doppler spectra, *Radio Sci.*, Vol. 12, No. 3, pp. 415-424.
- Crombie, D. D. (1955): Doppler spectrum of sea echo at 13.56 Mc./s, *Nature*, Vol. 175, pp. 681-682.
- Hashimoto, N. and Tokuda, M. (1999): A Bayesian approach for estimation of directional wave spectra with HF radar, *Coast. Eng. J.*, Vol. 41, Issue 02, pp. 137-149.
- Hinata, H., Fujii, S., Furukawa, K., Kataoka, T., Miyata, M., Kobayashi, T., Mizutani, M., Kokai, T. and Kanatsu, N. (2011): Propagating tsunami wave and subsequent resonant response signals detected by HF radar in the Kii Channel, Japan, *Estuar., Coast. Shelf Sci.*, Vol. 95, Issue 1, pp. 268-273.

- Hisaki, Y. (1996): Nonlinear inversion of the integral equation to estimate ocean wave spectra from HF radar, *Radio Sci.*, Vol. 31, No. 1, pp. 25–39.
- Holthuijsen, L. H. (2009): *Waves in Oceanic and Coastal Waters*, Cambridge University Press, 387p.
- Kataoka, T., Hinata, H. and Nihei, Y. (2013): Numerical estimation of inflow flux of floating natural macro-debris into Tokyo Bay, *Estuar., Coast. Shelf Sci.*, Vol. 134, pp. 69–79.
- Lipa, B. J. and Barrick, D. E. (1986): Extraction of sea state from HF radar sea echo: Mathematical theory and modeling, *Radio Sci.*, Vol. 21, No. 1, pp. 81–100.
- Mitsuyasu, H., Tasai, F., Suhara, T., Mizuno, S., Ohkusu, M., Honda, T. and Rikiishi, K. (1975): Observations of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy, *J. Phys. Oceanogr.*, Vol. 5, Issue 4, pp. 750–760.
- Wyatt, L. R. (1990): A relaxation method for integral inversion applied to HF radar measurement of the ocean wave directional spectrum, *Int. J. Remote Sens.*, Vol. 11, Issue 8, pp. 1481–1494.
- Yabuki, T. and Matsu'ura, M. (1992): Geodetic data inversion using a Bayesian information criterion for spatial distribution of fault slip. *Geophys. J. Int.*, Vol. 109, Issue 2, pp. 363–375.
- 合田良實 (2008): 耐波工学 –港湾・海岸構造物の耐波設計–, 鹿島出版会, 430p.
- 土木学会 (2001): 陸上設置型レーダによる沿岸海洋観測, 社団法人土木学会, 212p.
- 橋本典明, 三井正雄, 川口浩二, 横田雅紀, 小田圭祐, 濱野有貴 (2015): 高精度な方向スペクトルの観測と解析に向けた数値実験と現地観測, 土木学会論文集 B2(海岸工学), Vol. 71, No. 2, I_79–I_84.
- 橋本典明, Lukijanto, 山城賢 (2010): 海洋短波レーダーにおける方向スペクトル推定法の現地観測データへの適用性に関する検討, 土木学会論文集 B2(海岸工学), Vol. 66, No. 1, pp. 1411–415.
- 光易恒 (1970): 風波のスペクトルの発達 (2), 海岸工学講演会論文集, Vol. 17, pp. 1–7.

記号表

a : 1次及び2次散乱強度と散乱断面積の比例定数
 \mathbf{a}, \mathbf{b} : $f(\mathbf{x})$ を線形化したときの係数
 \mathbf{c}^{-1} : \mathbf{x} に関する分散共分散行列
 $\hat{\mathbf{c}}$: \mathbf{c} の最尤推定値
 C : ABICの定数
 $C_1(\omega_{DN}, \theta_{b0})$: 1次散乱断面積の係数
 $C_2(\omega_{DN}, \theta_b)$: 2次散乱断面積の積分係数
 \mathbf{d} : d_{Rk} を要素とするベクトル
 $d^{(1)}(\omega_D), d^{(2)}(\omega_D)$: 1次散乱強度, 2次散乱強度
 $d_R(\omega_{DN})$: 1次散乱強度に対する2次散乱強度の比
 d_{Rk} : $d_R(\omega_{DN})$ の離散値
 \mathbf{D} : 先験条件の作用行列
 D_0 : 方向分布関数の0次モーメント
 D_1 : 方向分布関数の1次モーメント
 \mathbf{e} : ε_k を要素とするベクトル
 \mathbf{E} : 単位行列
 E_0 : 波浪の0次スペクトルモーメント
 E_1 : 波浪の1次スペクトルモーメント
 f : 波浪の周波数
 f_0 : 電波周波数
 f_B : ブラッグ散乱周波数
 f_p : 周波数スペクトルのピーク周波数
 $f(\mathbf{x})$: 事後確率分布の指数部にある最小化すべき関数
 g : 重力加速度 ($= 9.8067 \text{ ms}^{-2}$)
 G_0 : 方向分布関数の正規化条件
 $G(\theta|f)$: 波浪の方向分布関数
 h : 観測点の水深
 h_N : 規格化された水深 ($= 2k_0 h$)
 H_s : 有義波高
 \mathbf{H} : Householder変換行列
 i, I : 周波数の分割番号, 分割数
 j, J : 波向の分割番号, 分割数
 k, \mathbf{k} : 波浪の波数, 波数ベクトル
 k_0, \mathbf{k}_0 : 電波波数, 波数ベクトル
 k_1, k_2 : 2次散乱に寄与する2つの成分波の浅海域における波数
 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$: 2次散乱に寄与する2つの成分波の浅海域における波数ベクトル
 k_{N1}, k_{N2} : 規格化された2次散乱に寄与する2つの成分波の浅海域における波数
 $\mathbf{k}_{N1}, \mathbf{k}_{N2}$: 規格化された2次散乱に寄与する2つの成分波の浅海域における波数ベクトル

$\hat{k}_{N1}, \hat{k}_{N2}$: Newton-Raphson法による収束解
 k_{d1}, k_{d2} : 2次散乱に寄与する2つの成分波の深海域における波数
 $\mathbf{k}_{d1}, \mathbf{k}_{d2}$: 2次散乱に寄与する2つの成分波の深海域における波数ベクトル
 k_{dN1}, k_{dN2} : 規格化された2次散乱に寄与する2つの成分波の深海域における波数
 $\mathbf{k}_{dN1}, \mathbf{k}_{dN2}$: 規格化された2次散乱に寄与する2つの成分波の深海域における波数ベクトル
 k_{NE} : 2次散乱に寄与する2つの成分波の波数が等しい場合の波数 ($= k_{N1} = k_{N2}$)
 k_x, k_y : 波数ベクトル平面のx軸及びy軸
 k_{xN}, k_{yN} : 規格化された波数ベクトル平面のx軸及びy軸
 l : \mathbf{z}_{lj} の要素番号
 L : 方向スペクトルの次元数 ($= I \times J$)
 $L(\alpha^2, \gamma^2)$: 事後確率分布の \mathbf{x} に関する積分値
 m, M : ドップラー角周波数の分割番号, 分割数
 m_1, m_2 : ドップラー角周波数の領域に依存した符号
 n : 繰り返し計算回数
 \mathbf{n} : 単位ベクトル
 $p(\mathbf{d}|\mathbf{x}, \alpha^2)$: \mathbf{d} の確率密度分布
 $p(\mathbf{x}|\beta^2)$: \mathbf{x} の事前確率分布
 $p(\mathbf{x}, \alpha^2, \beta^2|\mathbf{d})$: \mathbf{x} の事後確率分布
 s : エネルギー集中度に係るパラメータ
 s_{\max} : s の最大値
 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$: $\sigma_{Rk}(\mathbf{x})$ を要素とするベクトル
 $\mathbf{s}'(\mathbf{x}_0)$: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ における $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ の1次導関数
 $S(\mathbf{k})$: 波浪の波数スペクトル
 $S_N(\mathbf{k}_N)$: 規格化された波浪の波数スペクトル
 $S(f, \theta)$: 波浪の方向スペクトル ($= 2\pi S(\omega, \theta)$)
 $S_f(f)$: 波浪の周波数スペクトル
 $S_N(f_N, \theta)$: 波浪の方向スペクトル ($= S_N(\omega_N, \theta)$)
 T_s : 有義波周期
 \mathbf{u} : 任意のベクトル
 v_0 : 電波速度 ($= 3.0 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$)
 \mathbf{v} : \mathbf{u} の鏡映変換後のベクトル
 \mathbf{w} : 鏡映変換するためのベクトル
 x_{ij} : 対数化した方向スペクトルの離散値
 \mathbf{x} : x_{ij} を要素とするベクトル
 $\hat{\mathbf{x}}$: \mathbf{x} の最尤推定値
 $\hat{\mathbf{x}}$: $f(\mathbf{x})$ の最小二乗解
 \mathbf{X} : $f(\mathbf{x})$ を行列表現した時の \mathbf{x} からなる行列
 y : 2次散乱を引き起こす条件式 ($= m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$)
 \hat{y} : 無限水深における2次散乱を引き起こす条件式

$(=m_1\sqrt{gk_1}+m_2\sqrt{gk_2})$
 y_N : 規格化された 2 次散乱を引き起こす条件式
 $(=m_1\omega_{N1}+m_2\omega_{N2})$
 z^{-1} : 事後確率分布の正規化定数
 z_{ij} : Householder 変換適用後の上三角行列の要素
 \mathbf{Z} : $f(\mathbf{x})$ を行列表現した時の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \gamma\mathbf{D}$ からなる行列

α, β, γ : ハイパーパラメータ
 $\tilde{\alpha}$: α の最尤推定値
 $\tilde{\gamma}$: ハイパーパラメータ γ の最適値
 $\Gamma(\cdot)$: ガンマ関数
 Γ_E : 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数 (電磁気学的効果)
 $\hat{\Gamma}_E$: 深海域における 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数 (電磁気学的効果)
 Γ_{EN} : 規格化された 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数 (電磁気学的効果)
 Γ_H : 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数 (流体力学的効果)
 $\hat{\Gamma}_H$: 深海域における 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数 (流体力学的効果)
 Γ_{HN} : 規格化された 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数 (流体力学的効果)
 Γ_T : 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数
 $\hat{\Gamma}_T$: 深海域における 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数
 Γ_{TN} : 規格化された 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の結合係数
 $\delta(\cdot)$: デルタ関数
 Δ : インピーダンス ($=0.011-0.012i$)
 $\Delta\theta$: 方向スペクトルの波向間隔 ($=\theta_j-\theta_{j-1}$)
 $\Delta\mu$: 方向スペクトルの対数化した周波数間隔 ($=\ln(f_i/f_{i-1})$)
 ε_R : $d_R(\omega_{DN})$ の観測誤差
 θ : 波浪の波向
 θ_0 : 主波向
 θ_1, θ_2 : 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の波向
 $\theta(1), \theta(2)$: 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の波向
 θ_b : HF レーダのビーム方向角と波向との相対角 ($=\theta-\phi_b$)
 θ_{b0} : HF レーダのビーム方向角とブラッグ散乱を引き起こす成分波の波向との相対角 ($=-0.5(m_2+1)\pi$)
 θ_L : 2 次散乱断面積を計算するための積分区間の上下限值
 $\theta_{min}, \theta_{max}$: 方向スペクトルの積分区間における波向の

最小値, 最大値
 λ : 波浪の波長 ($=2\pi/k$)
 λ_d : 深海波の波長 ($=2\pi/k_d$)
 λ_0 : 電波波長 ($=2\pi/k_0$)
 μ : 対数化した周波数 ($=\ln f$)
 π : 円周率 ($=3.1415$ rad)
 $\sigma^{(1)}(\omega_D), \sigma^{(2)}(\omega_D)$: 1 次散乱断面積, 2 次散乱断面積
 $\sigma_N^{(1)}(\omega_{DN}), \sigma_N^{(2)}(\omega_{DN})$: 規格化された 1 次散乱断面積, 2 次散乱断面積
 $\sigma_R(\omega_{DN})$: 1 次散乱断面積に対する 2 次散乱断面積の比
 $\sigma_{Rk}(\mathbf{x})$: $\sigma_R(\omega_{DN})$ の離散値
 Σ : \mathbf{d} に関する分散共分散行列
 ϕ_b : HF レーダのビーム方向角
 ω : 波浪の角周波数 ($=2\pi f$)
 ω_1, ω_2 : 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の角周波数
 ω_B : ブラッグ散乱角周波数 ($=2\pi f_B$)
 ω_D : ドップラー角周波数
 ω_{DN} : 規格化されたドップラー角周波数
 ω_{N1}, ω_{N2} : 規格化された 2 次散乱に寄与する 2 つの成分波の角周波数

付録 A ドップラースペクトルの数値計算法

ここでは規格化した 1 次散乱断面積 $\sigma_N^{(1)}(\omega_{DN})$ 及び 2 次散乱断面積 $\sigma_N^{(2)}(\omega_{DN})$ の計算方法について詳説する。本研究では、1 次散乱断面積及び 2 次散乱断面積を数値的に計算するために、規格化された方向スペクトル $S_N(\omega_N, \theta)$ を次式のように $\omega_N - \theta$ 平面における離散的な一定値関数 $S_{i,j}$ で表現する。

$$S_N(\omega_N, \theta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J S_{i,j} \delta_{i,j}(\omega_N, \theta) \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $i (=1, 2, \dots, I)$ 及び $j (=1, 2, \dots, J)$ は、それぞれ角周波数と波向の分割番号を意味する。 $\delta_{i,j}(\omega_N, \theta)$ はデルタ関数であり、次式を満足する。

$$\delta_{i,j}(\omega_N, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \omega_{Ni} \leq \omega_N < \omega_{N(i+1)} \text{ and } \theta_j \leq \theta < \theta_{j+1} \\ 0 & \text{for others} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

図-A.1 に 1 次散乱断面積の計算フローを示す。1 次散乱断面積 $\sigma_N^{(1)}(\omega_{DN})$ は、式(2.31)で定義した $C_1(\omega_{DN}, \theta_{b0})$ とブラッグ散乱を引き起こす波の方向スペクトル値 $S_N(1, \theta_{b0} + \phi_b)$ を式(2.30)に代入すれば、容易に計算することができる。しかし、 $\omega_N - \theta$ 平面において $(\omega_N, \theta) = (1, \theta_{b0} + \phi_b)$ が式(A.1)のように離散化した格子点と一致するとは限らない。そこで、Hisaki(1996)と同様に、近傍の 4 格子点上の方向スペクトル値を用いて次式で線形内挿することで、任意の角周波数 $\bar{\omega}_N$ 及び波向 $\bar{\theta}$ における方向スペクトル値 $S_N(\bar{\omega}_N, \bar{\theta})$ を計算できるようにした。

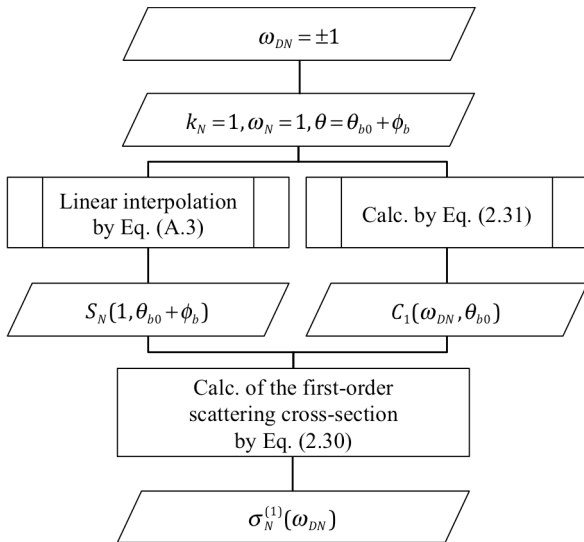


図-A.1 1 次散乱断面積の計算フローチャート

$$S_N(\bar{\omega}_N, \bar{\theta}) = w_1 S_{i,j} + w_2 S_{i+1,j} + w_3 S_{i,j+1} + w_4 S_{i+1,j+1} \quad (\text{A.3})$$

ここで、 $w_n (n=1, \dots, 4)$ は各格子点における方向スペクトル値の重みであり、図-A.2 に示す面積比で決まる。すなわち、

$$\begin{cases} w_1 = \frac{(\omega_{N(i+1)} - \bar{\omega}_N)(\theta_{j+1} - \bar{\theta})}{\Delta\omega_N \cdot \Delta\theta}, & w_2 = \frac{(\bar{\omega}_N - \omega_{Ni})(\theta_{j+1} - \bar{\theta})}{\Delta\omega_N \cdot \Delta\theta}, \\ w_3 = \frac{(\omega_{N(i+1)} - \bar{\omega}_N)(\bar{\theta} - \theta_j)}{\Delta\omega_N \cdot \Delta\theta}, & w_4 = \frac{(\bar{\omega}_N - \omega_{Ni})(\bar{\theta} - \theta_j)}{\Delta\omega_N \cdot \Delta\theta} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

であり、次式を満足する。

$$\sum_{n=1}^4 w_n = 1 \quad (\text{A.5})$$

一方、2 次散乱断面積 $\sigma_N^{(2)}(\omega_{DN})$ の基礎式 (式(2.32)) を離散化すると、

$$\sigma_N^{(2)}(\omega_{DN}) = \sum_{k=1}^K C_2(\omega_{DN}, \theta_{bk}) S_N(\omega_{N1k}, \theta_{1k}) S_N(\omega_{N2k}, \theta_{2k}) \Delta\theta_b \quad (\text{A.6})$$

と表現できる。ここで、 $C_2(\omega_{DN}, \theta_{bk})$ は、式(2.33)で定義される積分係数である。 $\theta_{bk} (k=1, 2, \dots, K)$ はビーム方向に対する成分波の波向の相対角であり、 $[-\theta_L, \theta_L]$ の範囲をとる (式(2.34))。すなわち、

$$\theta_{bk} = (k-1) \Delta\theta_b - \theta_L \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta\theta_b = 2\theta_L / (K-1) \quad (\text{A.8})$$

となる。 $S_N(\omega_{N1k}, \theta_{1k})$ 及び $S_N(\omega_{N2k}, \theta_{2k})$ は 2 次散乱を引き起こす 2 つの成分波の方向スペクトル値である。式(A.6)の数値積分は、図-A.3 の計算フローに基づいて

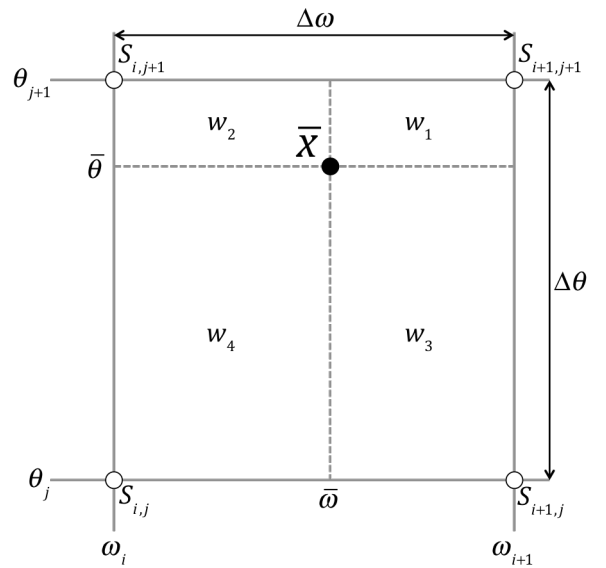


図-A.2 方向スペクトル値の線形内挿方法

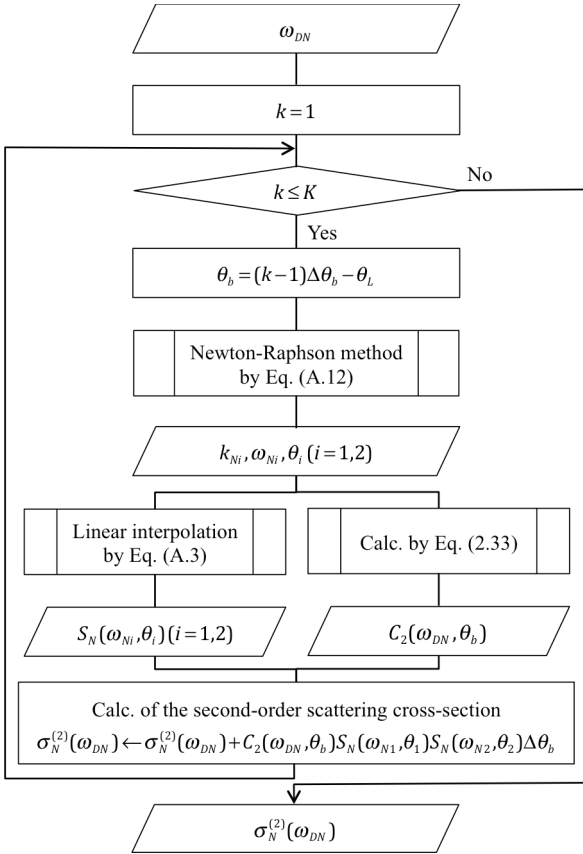


図-A.3 2次散乱断面積の計算フローチャート

実施する。

- (1) まず計算する2次散乱断面積のドップラー角周波数を ω_{DN} 決める。ここで決めたドップラー角周波数に応じて式(2.25)により符号 (m_1, m_2) が決まる。
- (2) 次に、(1)で決めたドップラー角周波数 ω_{DN} での2次散乱に寄与する2つの成分波をデルタ関数の制約条件 ($\delta(\cdot)=1$) を満足するように決定する。すなわち、式(A.7)で $\theta_b = \theta_{bk}$ を順次定義し、デルタ関数の制約条件式

$$\omega_{DN} - m_1 \omega_{N1} - m_2 \omega_{N2} = 0 \quad (A.9)$$

から、2つの成分波の波数 (k_{N1} 及び k_{N2}) を計算すればよい。なお、 k_{N2} は式(2.18)に示す共鳴条件 (図-A.4) から k_{N1} を用いて

$$k_{N2} = \sqrt{k_{N1}^2 + 2k_{N1} \cos \theta_b + 1} \quad (A.10)$$

と表現でき、さらに式(2.26)に示す分散関係を考慮すれば、式(A.9)の左辺は k_{N1} の関数 ($f(k_{N1})$) と見なすことができる。本研究では、Lipa and Barrick (1986)と同様に、次式の漸化式を用いた繰り返し計算 (Newton-Raphson 法) で数値的に解くことで、 $f(k_{N1})=0$ の解 $k_{N1} = \hat{k}_{N1}$ を求める。

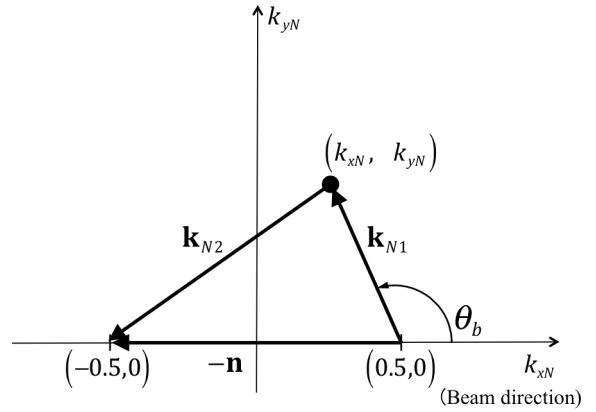


図-A.4 規格化された波数ベクトル平面における2次散乱を引き起こす2つの成分波の幾何学的条件

$$k_{N1}^{n+1} = k_{N1}^n - \left[\frac{f(k_{N1})}{\partial f(k_{N1}) / \partial k_{N1}} \right]_{k_{N1} = k_{N1}^n} \quad (A.11)$$

ここで、 $n (=0, 1, \dots)$ は繰り返し回数を意味し、 $\partial f(k_{N1}) / \partial k_{N1}$ は次式となる。

$$\frac{\partial f(k_{N1})}{\partial k_{N1}} = m_1 \frac{\partial \omega_{N1}}{\partial k_{N1}} + m_2 \frac{\partial k_{N2}}{\partial k_{N1}} \frac{\partial \omega_{N2}}{\partial k_{N2}} \quad (A.12)$$

なお、式(A.11)を繰り返し計算で解く際、初期値 k_{N1}^0 によって計算が発散するため、なるべく収束解に近い値が望ましい。そこで、 $h_N \rightarrow \infty$ かつ $\theta_b = 0$ と仮定したときの式(A.9)の解析解を初期値として用いた。すなわち、

$$k_{N1} = \left(\frac{\omega_{DN}^2 - 1}{2\omega_{DN}} \right)^2 \quad (A.13)$$

である。なお、初期値を計算する際に、 $h_N \rightarrow \infty$ としているが、式(A.11)を用いれば、 h_N に応じた最適解が得られるので問題ない。本研究では、 $|k_{N1}^{n+1} - k_{N1}^n| < 10^{-5}$ を収束基準として収束解 \hat{k}_{N1} を決定した。この収束解 \hat{k}_{N1} を式(A.10)に代入して \hat{k}_{N2} を決め、これらの波数 (\hat{k}_{N1} 及び \hat{k}_{N2}) を式(2.26)に示す分散関係式に代入することで2つの成分波の角周波数を特定することができる。さらに、次式から2つの成分波の波向 (θ_1 及び θ_2) を決定することができる。

$$\theta_i = \theta(i) - 0.5\pi(m_i - 1) \quad (i=1, 2) \quad (A.14)$$

$$\begin{cases} \theta(1) = \theta_b + \phi_b \\ \theta(2) = -\pi + \arcsin \left(\frac{\hat{k}_{N1}}{\hat{k}_{N2}} \sin \theta_b \right) + \phi_b \end{cases} \quad (A.15)$$

- (3) 特定した2つの成分波の波数 (\hat{k}_{N1} 及び \hat{k}_{N2}) から

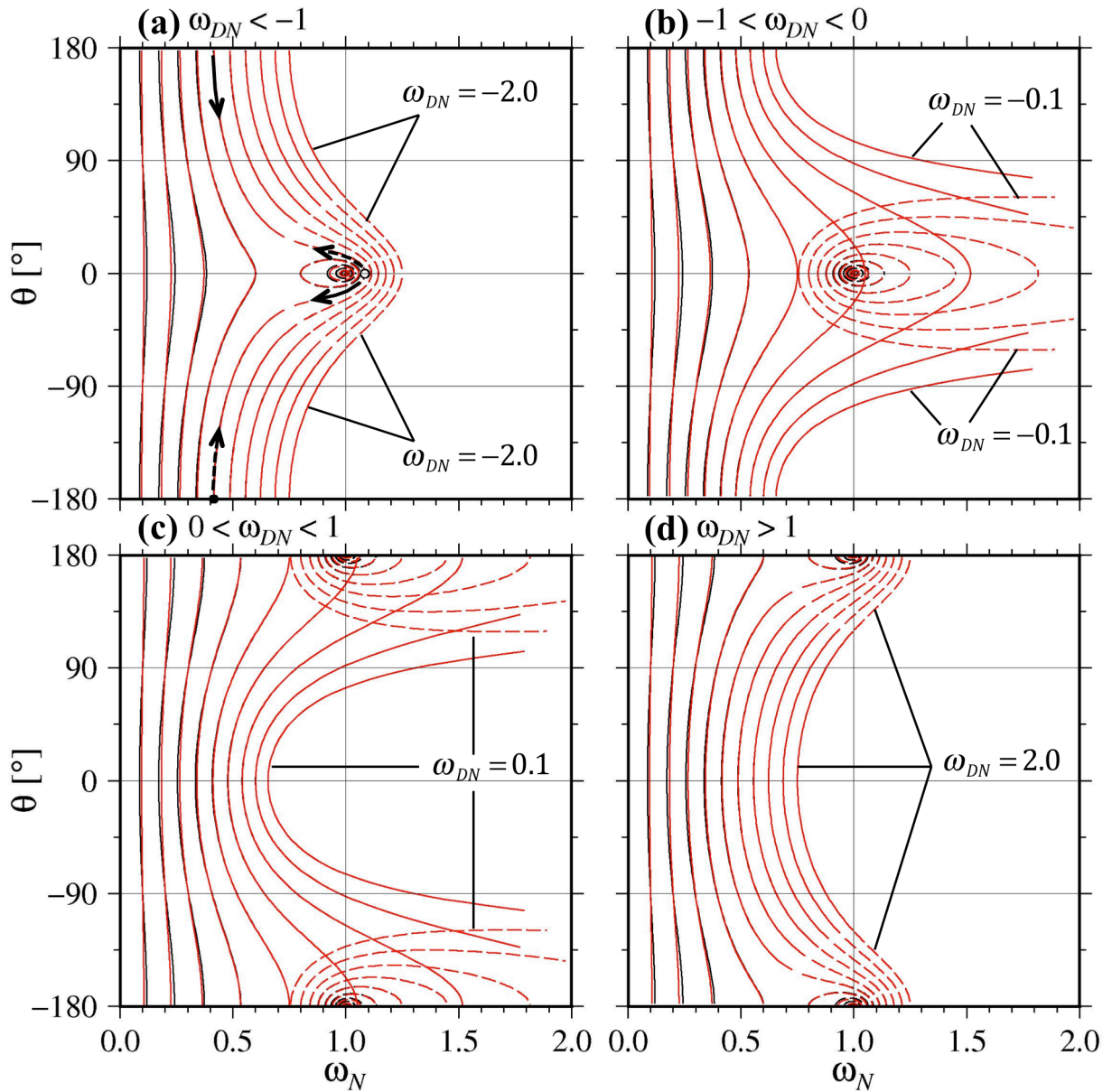


図-A.5 $\omega_N - \theta$ 平面における ω_{DN} の等値線 (黒線: $h=10$ m, 赤線: $h=100$ m) .

(a) $\omega_{DN} < -1$, (b) $-1 < \omega_{DN} < 0$, (c) $0 < \omega_{DN} < 1$, (d) $\omega_{DN} > 1$

式(2.33)で計算した $C_2(\omega_{DN}, \theta_b)$ と線形内挿(式(A.3))として計算した 2 つの成分波の方向スペクトル値 ($S_N(\omega_{N1k}, \theta_{1k})$, $S_N(\omega_{N2k}, \theta_{2k})$) を式(A.6)に代入して数値積分していくことで, 各ドップラー角周波数 ω_{DN} における 2 次散乱断面積を計算できる. 図-A.5 に $\phi_b=0$ のとき, $\omega_N - \theta$ 平面における 2 次散乱断面積を計算するための積分経路 (または, ドップラー角周波数 ω_{DN} の等値線) を示す. 図-A.5 (a)-(d)は, 式(2.25)に示す ω_{DN} の領域毎に描画している. 実線及び破線は, それぞれ波数 k_{N1} 及び k_{N2} の

成分波の積分経路を意味し, 黒線及び赤線は, それぞれ $h=10$ m 及び $h=100$ m の場合の積分経路を意味する. 式(A.6)の積分はドップラー角周波数で決まる積分経路に沿って実施する. 例えば, $(\omega_{DN}, \theta_b) = (-1.5, 0)$ のとき, 波数 k_{N1} の成分波の (ω_{N1}, θ_1) は図-A.5(a)中の黒丸, 波数 k_{N2} の成分波の (ω_{N2}, θ_2) は図-A.5(a)中の白丸となり, これらの位置における方向スペクトル値を線形内挿して 2 次散乱断面積の計算に用いる. そして, θ_b が $[-\theta_L, 0]$ の区間においては, 実線矢印の方に, $[0, \theta_L]$

の区間においては、破線矢印の方に順次積分を進めていけば、 $\omega_{DN} = -1.5$ における2次散乱断面積（すなわち、 $\sigma_N^{(2)}(-1.5)$ ）が計算できる。また、図-A.5に示すように基本的に積分経路は水深に依存して変化する。特に、 $|\omega_{DN}| > 0.5$ 及び $|\omega_{DN}| < 1.5$ の範囲において積分経路の変化が大きい。このため、これらの範囲における2次散乱断面積は水深に依存して変化する。

以上のようにして、すべての ω_{DN} に対して図-A.1及び図-A.3のフローで1次及び2次散乱断面積を計算すれば、理論的なドップラースペクトルを得ることができる。

付録 B Householder 変換を用いた最小二乗解法

方向スペクトルの推定は、ベイズの定理に基づけば、式(2.48)の事後確率分布を最大化すればよい。これは、あるハイパーパラメータ γ に関して、式(2.48)の指数部（すなわち、式(2.52)）の最小二乗解を求めることに相当する。ここでは、Householder 変換を用いた式(2.52)の最小二乗解法について詳説する。

式(2.52)の分散共分散行列 Σ^{-1} が単位行列(2.3参照)であることを考慮すると、式(2.52)は次式で書き換えることができる。

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{ax} - \mathbf{b}\|^2 + \gamma^2 \|\mathbf{Dx}\|^2 \tag{B.1}$$

ここで、 \mathbf{a} は次元 $K \times L$ の行列、 \mathbf{x} は次元 L のベクトル、 \mathbf{b} は次元 K のベクトル、 \mathbf{D} は L 次の正方行列である。さらに、式(B.1)を

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{ZX}\|^2 \tag{B.2}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \gamma\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

と書き換え、Householder 変換を適用する。なお、 \mathbf{Z} は次元 $(K+L) \times (L+1)$ の行列、 \mathbf{X} は次元 $(L+1) \times 2$ の行列である。

Householder 変換は、任意の行列に対して鏡映変換を繰り返すことでQR分解（直交行列と上三角行列に分解）するものであり、行列 \mathbf{Z} を $(L+1)$ 次の上三角行列に変換することができる。Householder 変換行列 \mathbf{H} は、次式のように定義される。

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^t \tag{B.4}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|} \tag{B.5}$$

ここに、 \mathbf{E} は単位行列、 \mathbf{u} は任意のベクトル、 \mathbf{v} は \mathbf{u} の鏡映変換後のベクトルである。今、 \mathbf{Z} にHouseholder 変換を適用することで、

$$\mathbf{HZ} = \begin{pmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,L+1} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & z_{L+1,L+1} \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

を得られたものとする。このとき、式(B.2)の右辺は、

$$\|\mathbf{HZX}\|^2 = \begin{pmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,L} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & z_{L,L} \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} z_{1,L+1} \\ \vdots \\ z_{L,L+1} \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

となる。式(B.7)の右辺第1項から式(B.2)あるいは式(2.52)の最小二乗解 $\hat{\mathbf{x}}$ は

$$\begin{pmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{1,L} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & z_{L,L} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} z_{1,L+1} \\ \vdots \\ z_{L,L+1} \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

の解として容易に求められる。式(B.7)の右辺第2項（すなわち、 $z_{L+1,L+1}^2$ ）は $f(\hat{\mathbf{x}})$ と一致することから、観測誤差のスケールを意味するハイパーパラメータ α^2 は、式(2.63)に基づき、

$$\alpha^2 = z_{L+1,L+1}^2 / K \tag{B.9}$$

で得られる。

加えて、ABICもまたHouseholder 変換の結果(式(B.8))を用いることで容易に計算することができる。式(2.65)でABICを計算する際、式(2.58)で定義した \mathbf{c} の行列式 $|\mathbf{c}|$ が必要となる。 $|\mathbf{c}|$ は、式(B.8)の左辺の行列の対角成分 $z_{l,l}$ から

$$|\mathbf{c}| = \prod_{l=1}^L z_{l,l}^2 \tag{B.10}$$

で得られる。ここに、 $l(=1,2,\dots,L)$ は式(B.8)の左辺の行列の要素番号である。しかしながら、式(B.10)のように乗積をとると、アンダーフローが生じ、ABICが計算できない可能性がある。そのため、ここでは、

$$\ln|\mathbf{c}| = \sum_{l=1}^L \ln z_{l,l}^2 \tag{B.11}$$

を計算し、アンダーフローが生じないようにした。したがって、式(B.9)と式(B.11)を式(2.65)に代入すれば、

$$ABIC = K \ln z_{L+1, L+1}^2 - L \ln \gamma^2 + \sum_{l=1}^L \ln z_{l,l}^2 + C \quad (\text{B.12})$$

となり, ABIC を容易に計算することができる.

国土技術政策総合研究所資料

TECHNICAL NOTE of NILIM

No. 895 March 2016

編集・発行 ©国土技術政策総合研究所

本資料の転載・複写のお問い合わせは

〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬 3-1-1
管理調整部企画調整課 電話:046-844-5019