コンクリート舗装の Westergaard載荷公式 及び 剛比半径の考察

国土交通省国土技術政策総合研究所
空港研究部　空港施設研究室長
坪川　将丈

Harold Malcolm Westergaard（1888-1950）

Wikipedia英語版より

- コンクリート舗装の応力やたわみの理論解等、弾性理論に基づく様々な研究成果を発表。
- ダム壁面に作用する地震時動水圧の理論解でも知られている（本邦の河川構造物の照査でも使用されている）。

- デンマーク　コペンハーゲン生まれ（1888）
- デンマーク工科大学卒業（1911）
- イリノイ大学でPh.D取得（1916）
- Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analyses（1926）
- イリノイ大学教授（1927～）
- Analytical Tools for Judging Results of Structural Tests of Concrete Pavements（1933）
- ハーバード大学教授（1936～）
- Stresses in Concrete Runways of Airports（1939）
- Stresses Concentration in Plates Loaded over Small Areas（1943）
- New Formulas for Stresses in Concrete Pavements of Airfields（1948）

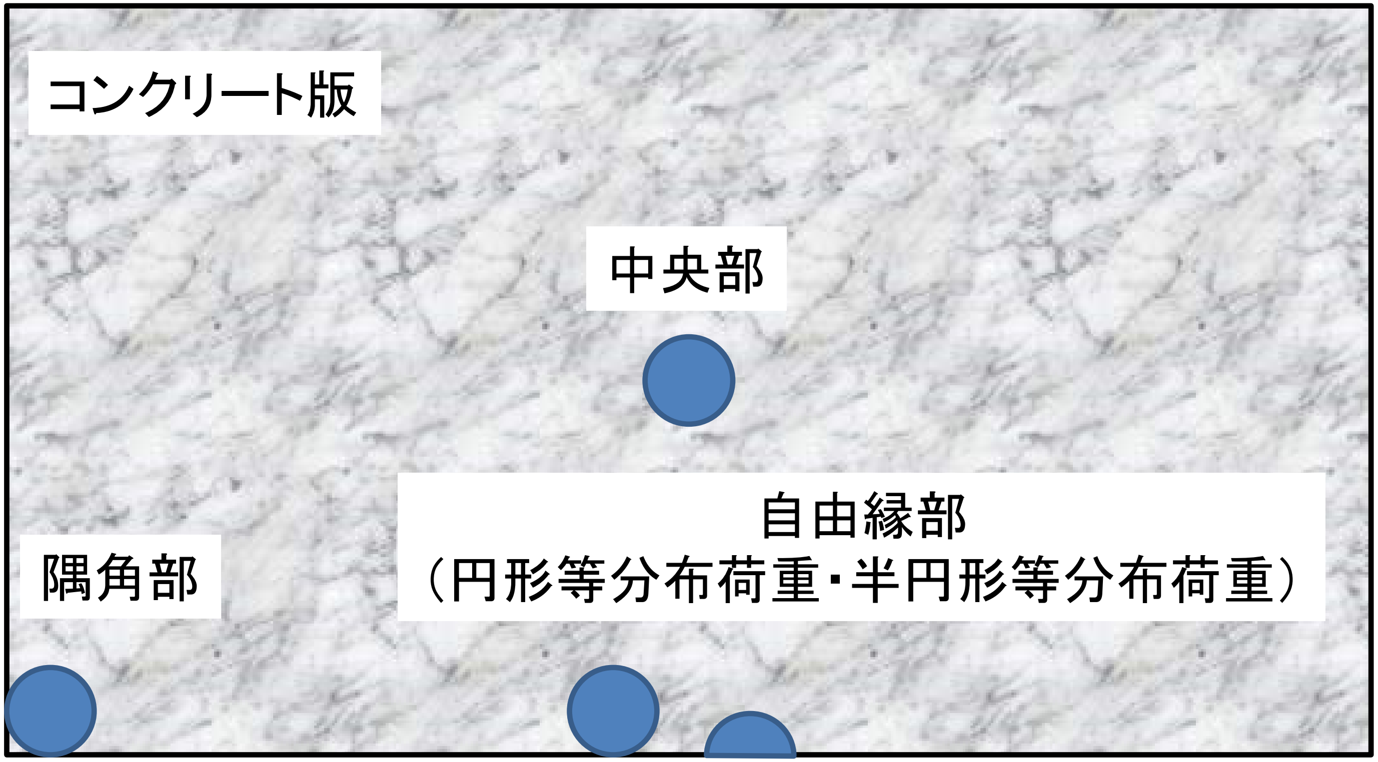
背景

- 国土交通省航空局：空港土木施設設計要領（舗装設計編）には、Westergaardの研究成果に由来すると考えられる応力式、たわみ式が掲載されている。
- 1999年から空港舗装の設計要領に掲載されている中央部たわみ式については、誤りがあることが判明した（影響は軽微・2022年4月改正済）。
- 文献調査により、自由縁部の応力式・たわみ式は問題ないことを確認した。
- 中央部応力式は、Westergaard式と言われているものの、根拠論文が不明であったが、今回の調査により（ほぼ間違いないレベルで）確認できた。

本資料の概要

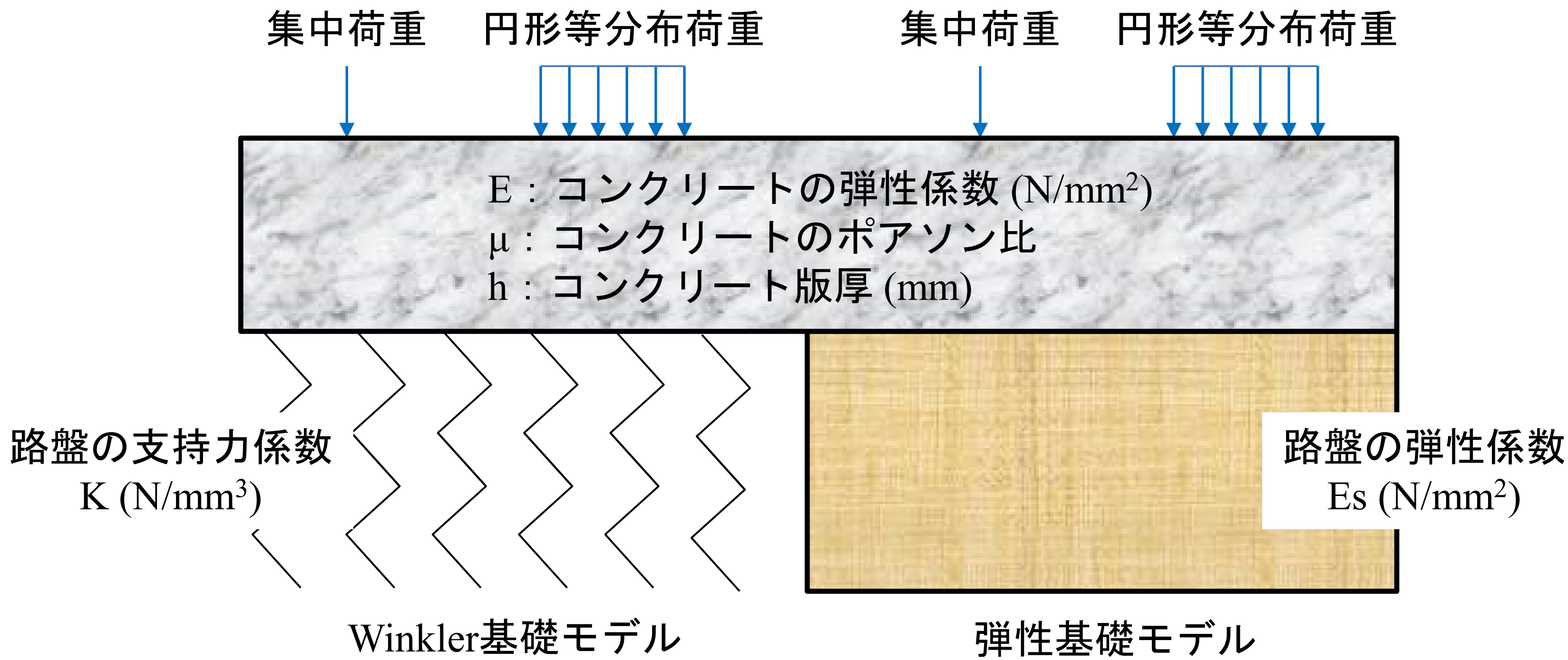
- 以下の理由から、文献調査結果を基に応力式・たわみ式の根拠を整理した（本資料の2章）。
  - ➢ 文献が古く、入手が困難な文献がある。
  - ➢ Westergaard自身が何度か式を修正して提案しているため、どの時点の研究成果なのかがわかりにくい。
  - ➢ 他の研究者がWestergaard式を修正した式もある。
  - ➢ 実験結果由来の数値なのか単位換算目的の数値なのかが紛らわしい。
- あわせて、1926年にWestergaardが初めて提唱した、コンクリート舗装の「剛比半径」について考察した（本資料の3章）。

基礎知識



- コンクリート版には目地があることから、応力やたわみを算出する際の荷重載荷位置は、上図の3種類に分類されている。本資料では使用頻度が低い隅角部は対象外。
- 「たわみ」は、コンクリート版表面の鉛直変位である。
- 「応力」は、コンクリート版下面の水平方向応力（引張応力）である。
- 本資料の前半では「載荷中心の応力・たわみ」を、後半では「載荷重から離れた位置の応力・たわみの分布」を扱う。

基礎知識



- Winkler基礎モデル：多数の独立した一次元バネでコンクリート版を支えるモデル。路盤内の横方向変位は考慮できないものの「たわみにバネ値を乗じれば路盤反力になる」ため理論的に扱いやすい。Westergaard式はこちらを採用している。
- 弾性基礎モデル：一様な弾性体でコンクリート版を支えるモデルである。構造解析が容易となった現代では弾性路盤モデルを用いることが多い。Westergaardも、実験結果を受け、弾性基礎を意識した修正を施している。

Westergaard載荷公式の考察

設計要領に掲載されている応力・たわみ式

- 次頁以降に示す文献調査結果をまとめると以下のとおり。

	応力式	たわみ式
中央部	Westergaardによる 基本項 応力低減項 応力増加項 を合算した式と推測	Westergaard式であるが 対数の底に誤りがある （2022年4月改正済）
自由縁部	Westergaard式を TellerとSutherlandが修正し さらに岩間が修正した式	Westergaard式

自由縁部たわみ式

- Westergaard（1926）による自由縁部たわみ式は、設計要領に記載のたわみ式と一致する。

$$w_e = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1 + 0.4\mu) \cdot \frac{P}{K \cdot l^2}$$

自由縁部応力式

- Westergaard（1933）による自由縁部応力式（半円形等分布荷重の場合）。

$$\sigma_e = 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10}\left(\frac{Eh^3}{Kb^4}\right) - 0.71\right]$$

- それをTellerとSutherland（1943）が修正した応力式（半円形等分布荷重の場合）。ただし長さの単位はinchである。

$$\sigma_e = 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10}\left(\frac{Eh^3}{Kb^4}\right) + \log_{10}\left(\frac{b}{1-\mu^2}\right) - 1.079\right]$$

- それを岩間（1964）が修正した応力式（円形等分布荷重の場合）は、設計要領に記載の応力式と一致する。なお式中の「10」はcm→mm換算由来の数値項である。

$$\sigma_e = 2.12 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10}\left(\frac{l}{10}\right) - 0.75 \cdot \log_{10}\left(\frac{r}{10}\right) - 0.18\right]$$

中央部たわみ式

- Westergaard（1926）による集中荷重の中央部たわみ式。

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2}$$

- Westergaard（1939）による円形等分布荷重の中央部たわみ式。

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left\{1 - \frac{r^2}{8\pi \cdot l^2} \cdot \ln\left(\frac{Eh^3}{Kr^4}\right) - \frac{3r^2}{8\pi \cdot l^2}\right\}$$

- これを変形すると

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot [1 - {a_k}^2\{0.217 - 0.367 \cdot \log_{10}(a_k)\}]$$

- 設計要領に記載のたわみ式は以下のとおりであり、対数の底が異なるので誤りである。

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot [1 - {a_k}^2\{0.217 - 0.3671 \cdot \ln(a_k)\}]$$

- プレキャストコンクリート舗装の設計において、版厚を決定した後にたわみ量の確認のため使用されているが、この式で版厚が決定されることはない。また、プレキャストコンクリート版を想定した場合のたわみの差は約2%程度と軽微である。

試算例　誤った式によるたわみ＝0.504 mm

正しい式によるたわみ＝0.514 mm

中央部応力式

- 設計要領に掲載されている中央部応力式は「Westergaard式」と言われているものの、それを裏付ける文献が不明であった（10年以上探していた）。
- Westergaard（1926）が最初に発表した中央部応力式は以下のとおり。

$$\sigma_i = \frac{3P(1+\mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{ \ln\left(\frac{l}{b}\right) + 0.6159 \right\}$$

- Westergaard（1933）が数値項を一般化して発表した中央部応力式。対数内のポアソン比を0.15として変形すると前式とほぼ一致する。

$$\sigma_i = 0.275 \cdot (1+\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \log_{10}\left(\frac{Eh^3}{Kb^4}\right)$$

- この応力式は、以下のような形でも引用されていることがあるが、結局のところ、このページに掲載しているのは全て同じ応力式である。このように様々な形で引用されているため、同一の応力式なのかの判別が難しい。

$$\sigma_i = 1.1 \cdot (1+\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10}\left(\frac{l}{b}\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_{10}\{12 \cdot (1-\mu^2)\} \right\}$$

$$\sigma_i = 1.1 \cdot (1+\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10}\left(\frac{l}{b}\right) + 0.2673 \right\}$$

$$\sigma_i = 0.275 \cdot (1+\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ 4 \cdot \log_{10}\left(\frac{l}{b}\right) + 1.0692 \right\}$$

中央部応力式

- アメリカが実施したArlington Testの結果を受け、Westergaard（1933）は前述の応力式に応力低減項を追加している。応力低減項には2つのパラメータ（LとZ）が導入されたが、ここでは各種文献で提案されていた3種類の値の中からL=5ℓ・Z=0.2を入力したものを示している。

$$\sigma_i = \frac{3P(1+\mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{\ln\left(\frac{l}{b}\right) + 0.6159\right\} \quad - 0.12 \cdot (1+\mu) \cdot \frac{P}{h^2}$$

- Westergaard（1939）は応力増加項を追加している。

$$\sigma_i = \frac{3P(1+\mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{\ln\left(\frac{l}{b}\right) + 0.6159\right\} \quad + \frac{3P(1+\mu)}{64h^2} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^2$$

- Westergaardによる基本項、応力低減項、応力増加項の全てを合算すると次式となる。

$$\sigma_i = \frac{3P(1+\mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{\ln\left(\frac{l}{b}\right) + 0.6159\right\} \quad - 0.12 \cdot (1+\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \quad + \frac{3P(1+\mu)}{64h^2} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^2$$

中央部応力式

- 前式に、港研資料に言及があるポアソン比として1/6＝0.167を入力すると、設計要領の応力式と一致した。

$$\sigma_i = 0.0547 \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 10.186 \cdot \ln \left(\frac{b}{l} \right) + 3.714 \right\}$$

- 港研資料では「ドイツの空港PC舗装設計施工規準に記載されているWestergaard修正式」とある。この文献は確認できないものの、上記のように変形された応力式と推測される。

ドイツの「空港ＰＣ舗装設計施工規準7)」では，荷重中心下における舗装版の下縁に働く最大引張応力度 σ_i を求める式として，次の Westergaard の修正式を与えている。

$$\sigma_i = 0.0547 \frac{p}{h^2} \left[\left(\frac{b}{l} \right)^2 - 10.186 \log_e \frac{b}{l} + 3,714 \right] \quad \cdots\cdots (3.1)$$

ここで，p；舗装にタイヤを通して伝えられる荷重
h；コンクリート舗装版厚
E；コンクリートのヤング係数
k；路盤支持力係数
l；剛比半径
コンクリートのポアソン比 μ＝1/6 とした場合剛比半径は次式で表わされる。

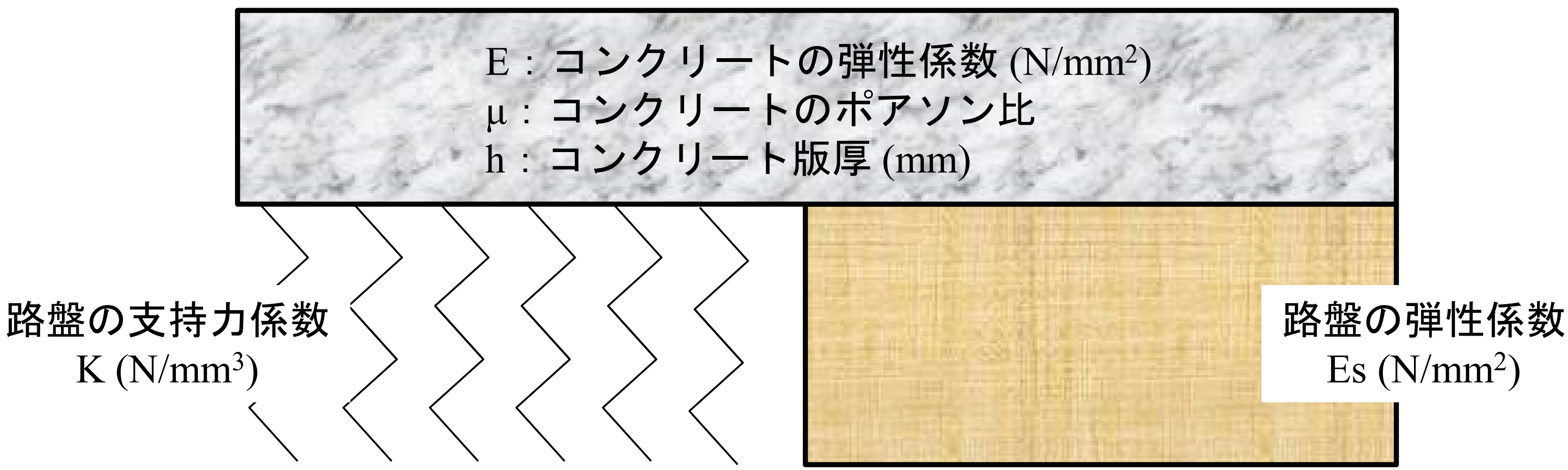
山家ら：プレストレストコンクリート舗装の設計方法に関する調査研究－空港舗装に関する調査研究第４報－、港湾技研資料、1968.

- プレキャスト舗装を想定した条件で試算したところ、各項の寄与は基本項（113.8%）、応力低減項（-14.1%）、応力増加項（0.3%）であった。

剛比半径の考察

剛比半径

- Westergaard（1926）が「解析に繰返し出現する項である」として剛比半径（radius of relative stiffness）を提唱。一般的なコンクリート舗装の条件では1m前後の長さ。
- 多くの文献で「荷重分散の程度を表す指標」と言及されているのみであり、舗装構造の視点から、具体的にどのような長さを意味するのかを解説している文献がほぼない。



Winkler基礎モデル　　弾性基礎モデル

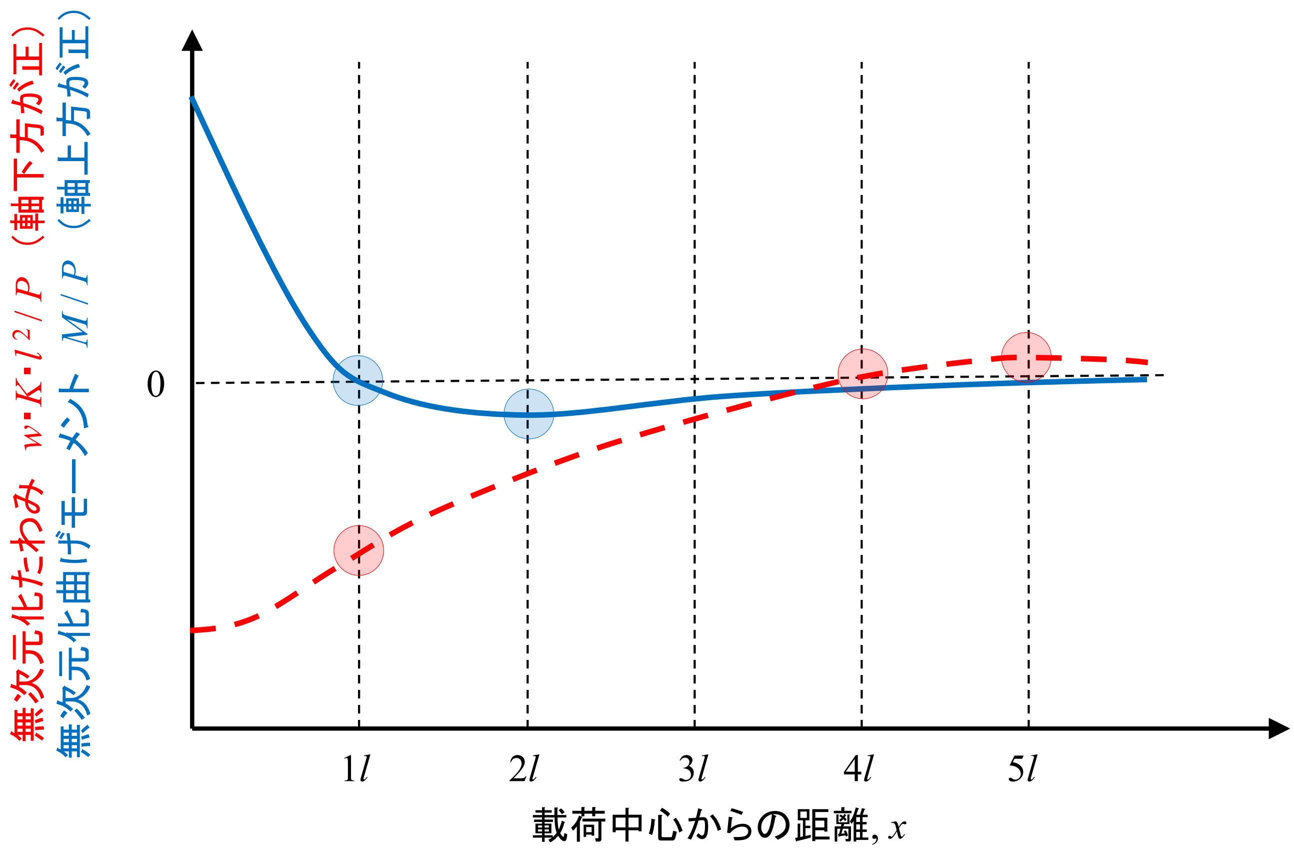
剛比半径

$$l = \sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot K}}$$

$$l_s = \sqrt[3]{\frac{E \cdot h^3 \cdot (1 - {\mu_s}^2)}{6 \cdot E_s \cdot (1 - \mu^2)}}$$

剛比半径ーたわみと曲げモーメント

- Westergaard（1926）の原著では、中央部載荷の解析結果として以下の図を示していることから、剛比半径とは「載荷中心」から「曲げモーメントが0となる位置＝版に発生するたわみの変曲点の位置＝曲げ応力が0となる位置」までの距離に相当すると考えられる。
- Winkler基礎モデル及び弾性基礎モデルにより解析を実施し、剛比半径の意味を考察した。



剛比半径－たわみと曲げモーメント

- Winkler基礎モデルとして、Westergaad（1939・1948）の研究成果を基に、PicketとRay（1951）が作成した影響図を、福手（1977）が電算化したプログラムにより解析。
- Westergaard（1926）の原著と同様に、載荷中心から

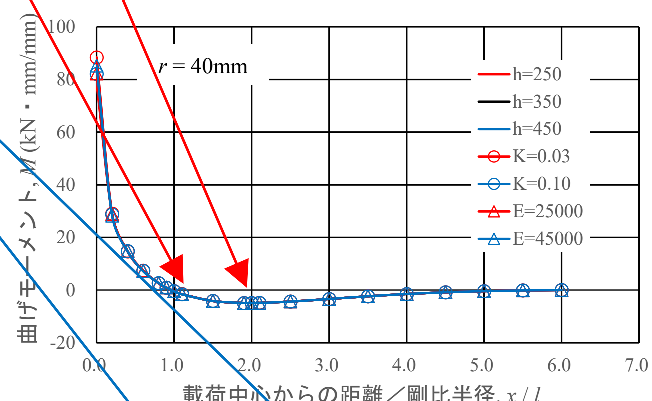
ℓで曲げモーメントはゼロ

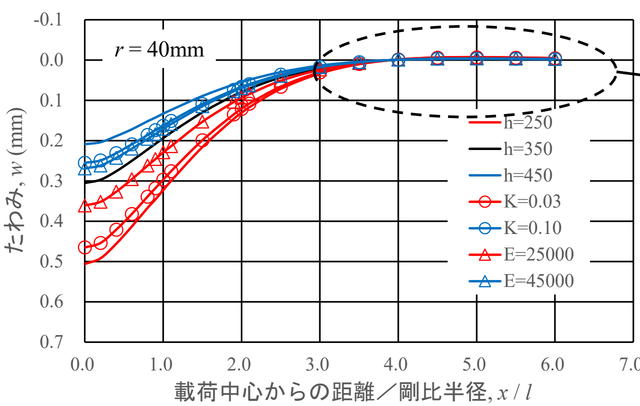
2ℓで曲げモーメントは負の最大値

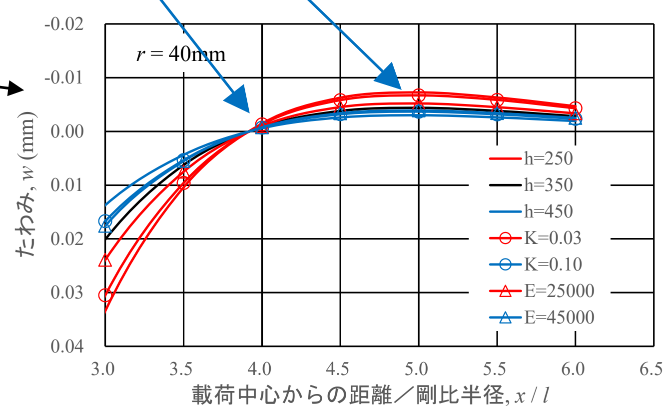
4ℓでたわみはゼロ

5ℓでたわみは負の最大値

が確認できた。



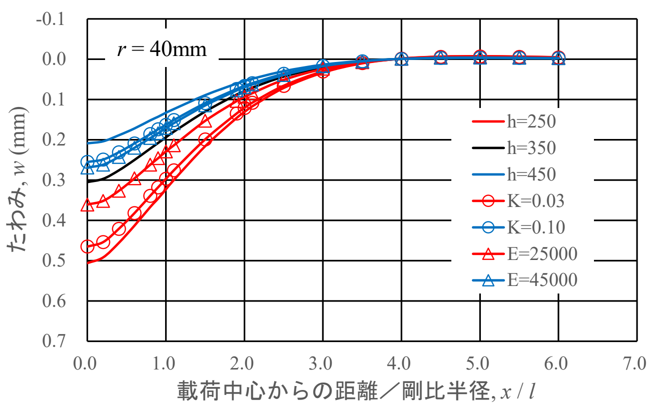




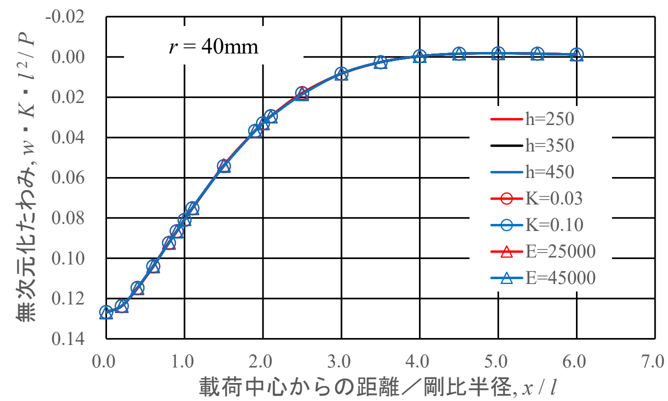
剛比半径－たわみと曲げモーメント

- 縦軸のたわみについては、剛比半径を用いて無次元化することにより、E・h・Kが変化しても、無次元化たわみ分布は一致する。
- 弾性基礎モデルとして、多層弾性解析プログラムGAMESによる解析でも同様であった。
- ただし、剛比半径に比して接地半径が大きくなると、載荷重近傍では一致しなくなる（後述）。

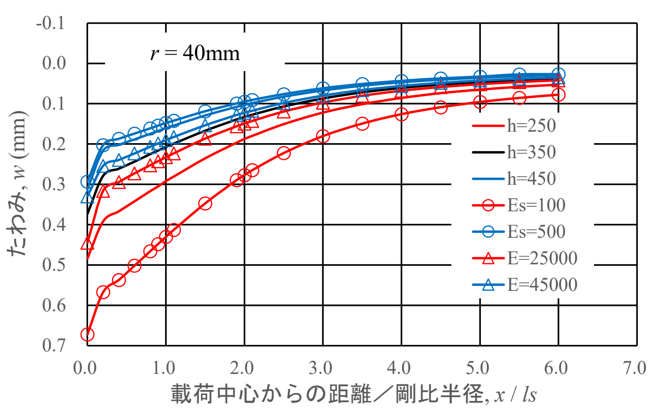
Winkler
基礎
モデル



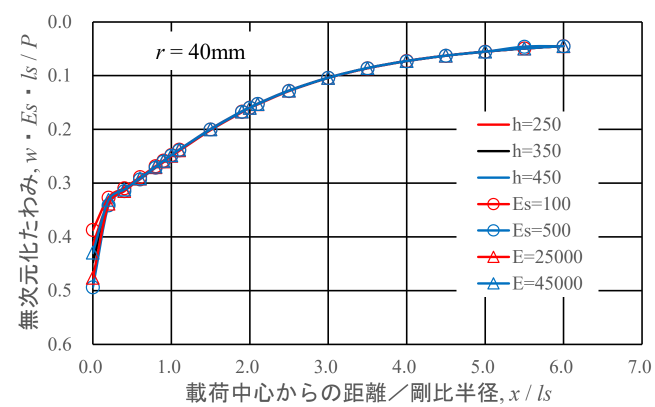
P/(K・ℓ^2)
で
無次元化



弾性基礎
モデル

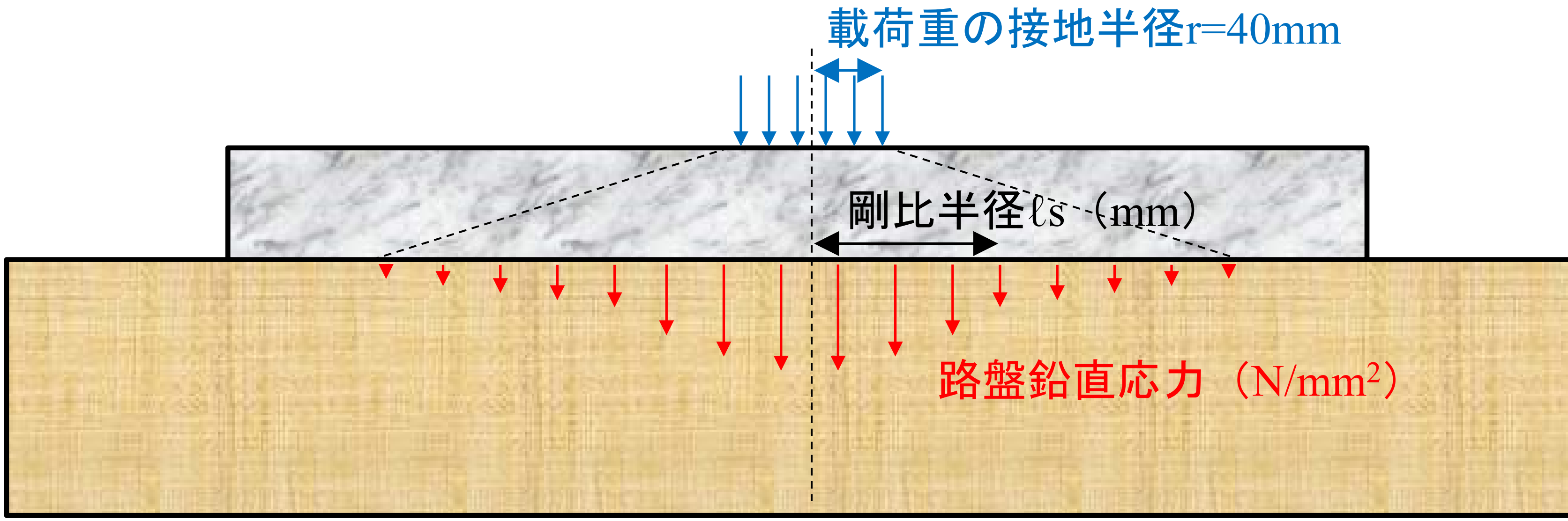


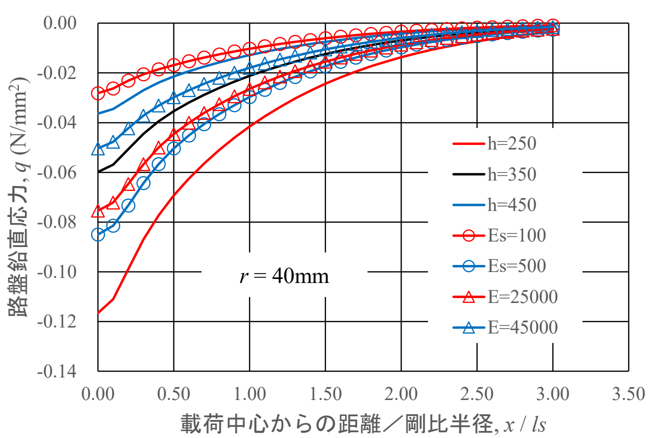
P/(Es・ℓs)
で
無次元化



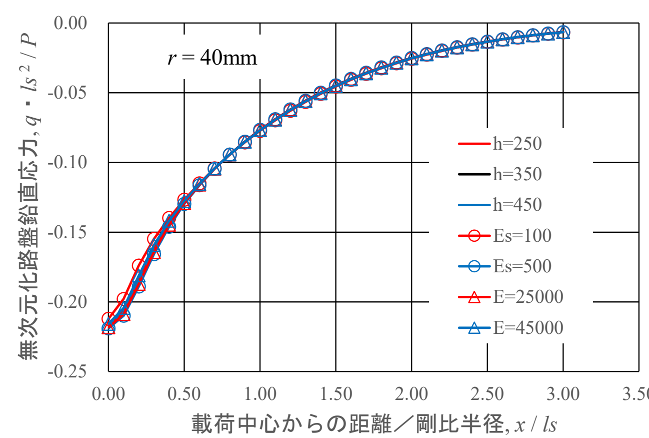
剛比半径－荷重分散

- 「荷重分散」の観点から、弾性基礎モデルで路盤上面における路盤鉛直応力（N/mm²）を確認したところ、$P/\ell s^2$で無次元化することにより分布が一致することがわかった。





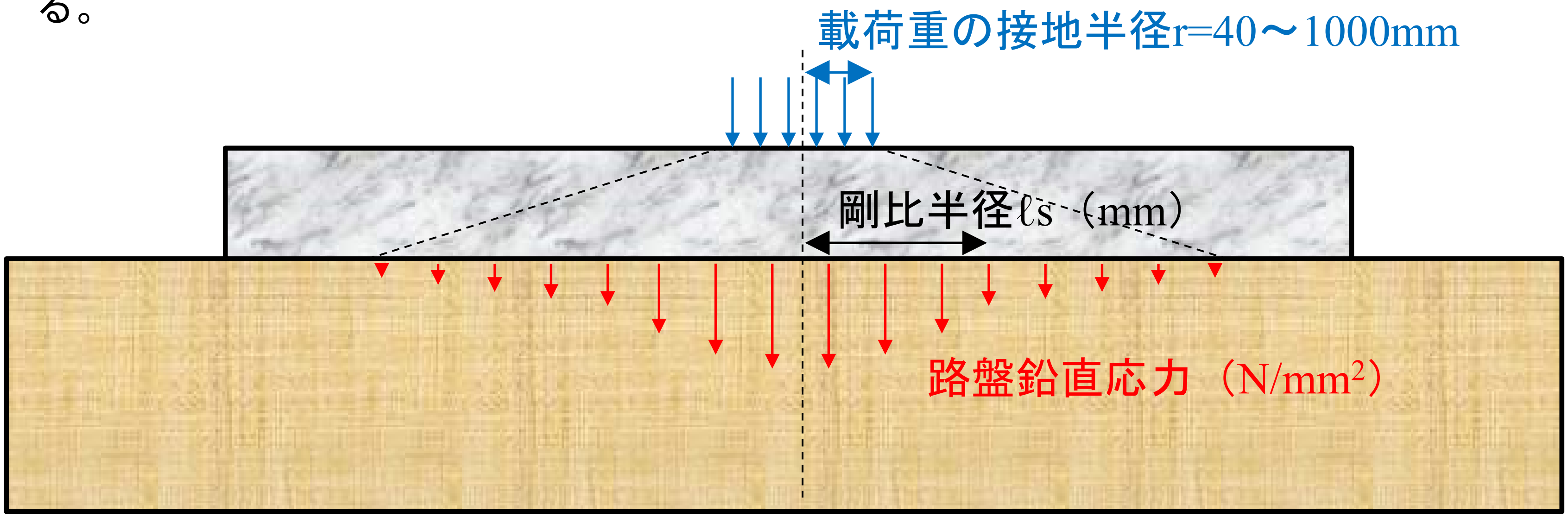
$P/\ell s^2$
で
無次元化

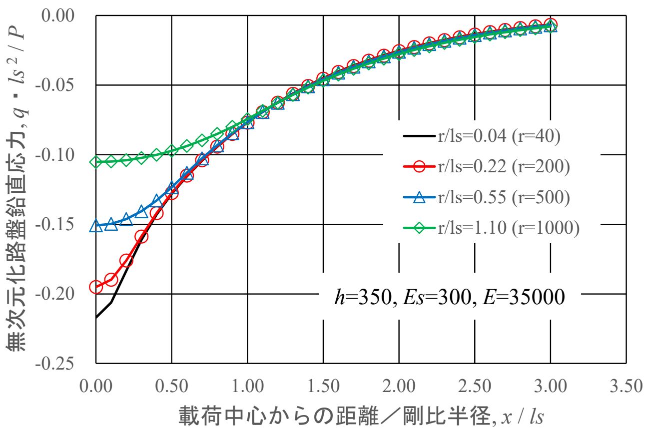


E、h、Esを変化させた場合

剛比半径ー荷重分散

- ただし、剛比半径に比して接地半径が大きくなると、載荷重近傍において一致しなくなる。

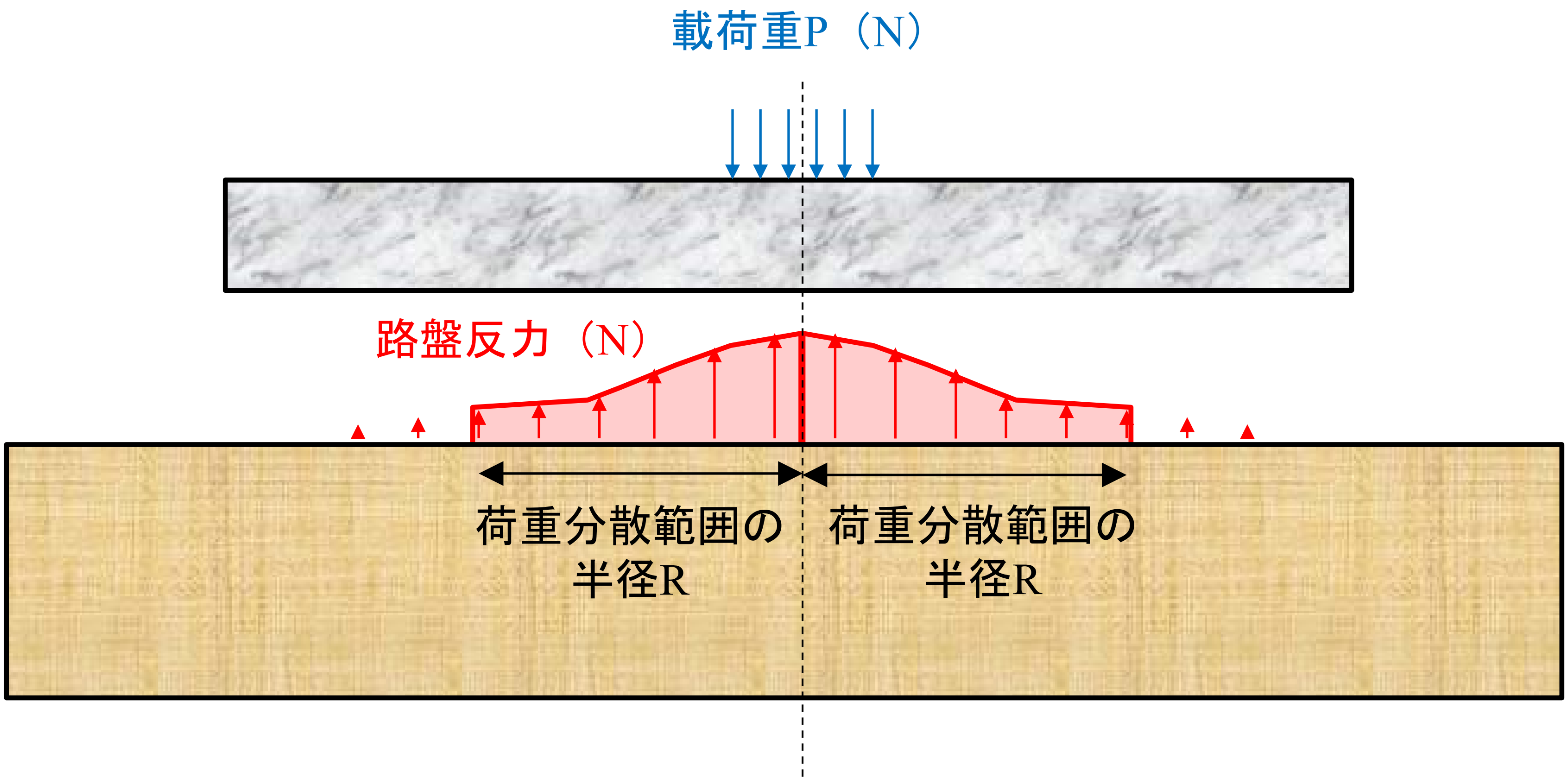




接地半径のみ変化させた場合の無次元化路盤鉛直応力

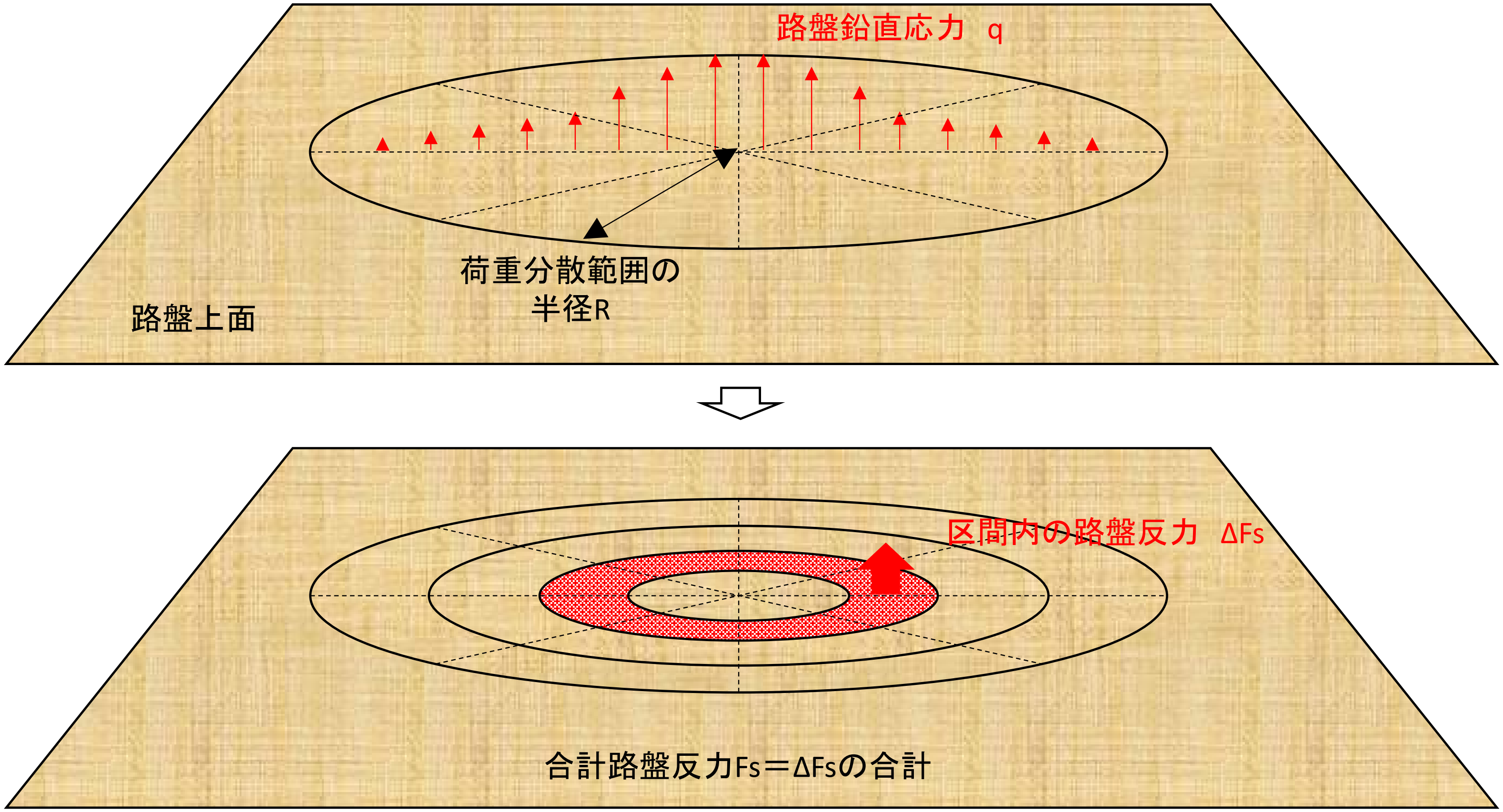
剛比半径－荷重分散

- 載荷中心から半径Rの範囲を「荷重分散範囲」と定義し、荷重分散範囲内でコンクリート版が路盤から受ける路盤反力（N）＝路盤鉛直応力×面積の傾向を考察した。



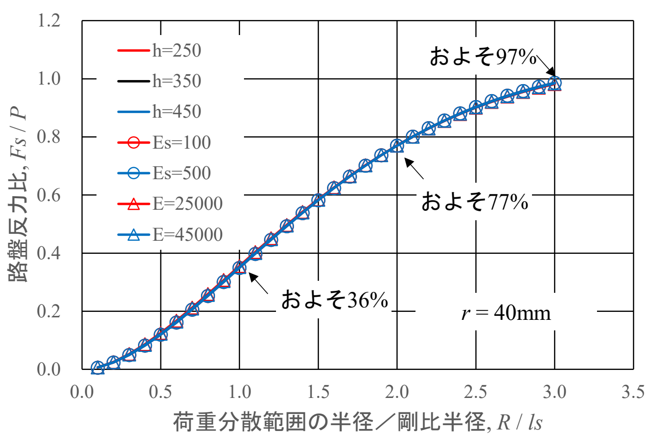
剛比半径－荷重分散

- 荷重分散範囲を細かくリング状に分割して路盤反力ΔFsを算出し、合計路盤反力Fsを載荷重Pで除すことで「路盤反力比」を算出した。
- 例えば、半径Rの路盤反力比がα%　→　半径Rの円形範囲内において、コンクリート版が路盤から受ける反力は、載荷重Pのα%

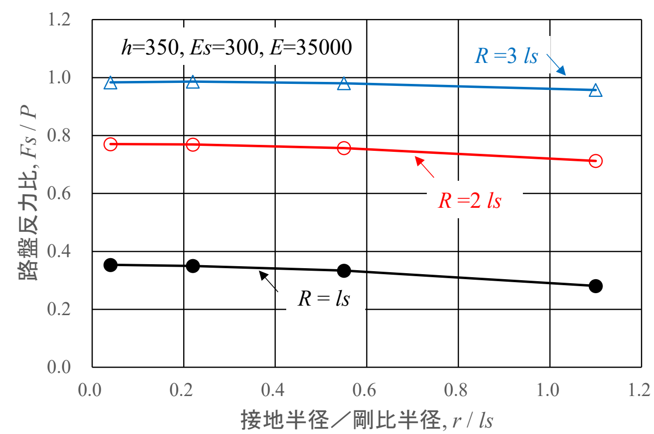


剛比半径－荷重分散

- コンクリートの弾性係数E、コンクリート版厚h、路盤の弾性係数Esを変化させても、路盤反力比と荷重分散範囲半径の関係は一致した。
- 例えば、載荷中心から剛比半径の1倍の半径を有する荷重分散範囲内では、載荷重のおよそ36%の反力を負担しており、この割合はE・h・Esによらず一定であると言える。
- 接地半径が剛比半径に比して大きくなると、路盤反力比の分布曲線はやや低下するが、「載荷中心から剛比半径までの円形範囲で載荷重の概ね30%程度の反力を負担している」と言える。



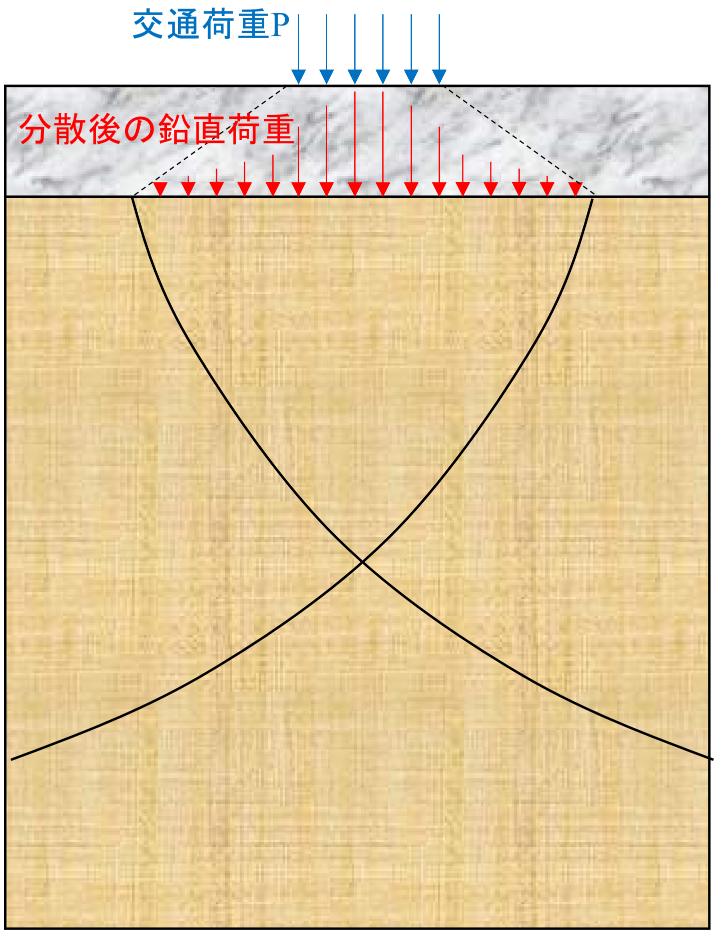
E、h、Esを変化させた場合

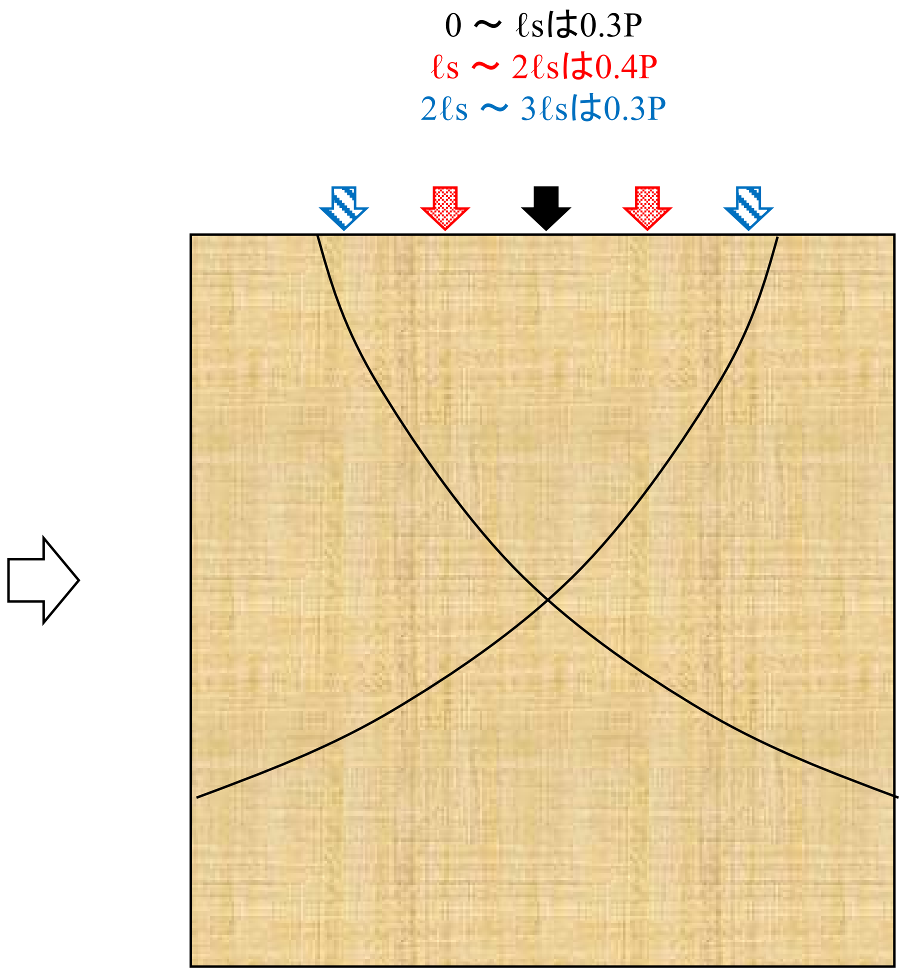


接地半径を変化させた場合

剛比半径ー荷重分散

- 載荷重がコンクリート版により分散された結果である路盤上面の鉛直荷重を入力値として地盤の安定解析を行う場合、多層弾性解析を用いずとも、路盤上面に付与すべき入力分布荷重を容易に設定できる。





結論

設計要領に記載の応力式・たわみ式は

- 自由縁部たわみ式は、Westergaard式である。
- 自由縁部応力式は、Westergaard式をTellerとSutherlandが修正し、さらに岩間が修正した式である。
- 中央部たわみ式は、Westergaard式であるが誤りがある。
- 中央部応力式は、Westergaardが提案した基本項・応力低減項・応力増加項を合算し、ポアソン比1/6を入力した応力式と推測される。

剛比半径は

- 理論上は「載荷中心」から「たわみの変曲点」「曲げ応力が0となる位置」までの距離に相当すると考えられる。
- 剛比半径を用いて「載荷中心からの距離」及び「コンクリート版のたわみ、曲げ応力、路盤反力」を無次元化することで、分布は同一となる。