

国土技術政策総合研究所資料

TECHNICAL NOTE of
National Institute for Land and Infrastructure Management

No.1196

March 2022

コンクリート舗装のWestergaard載荷公式及び剛比半径の考察

坪川将丈

Consideration on Westergaard's Formulas and
Radius of Relative Stiffness for Rigid Pavement

TSUBOKAWA Yukitomo

国土交通省 国土技術政策総合研究所

National Institute for Land and Infrastructure Management
Ministry of Land, Infrastructure, Transport and Tourism, Japan

コンクリート舗装のWestergaard載荷公式及び剛比半径の考察

坪川将丈*

要 旨

コンクリート版に発生する応力・たわみの算出手法の研究成果として最も有名なのは、Harold Malcolm Westergaardが1920年代以降に提案したWestergaard載荷公式である。しかしながら、Westergaardによる研究成果や、他の研究者がWestergaardの載荷公式を修正した研究成果は、非常に古い海外文献が多く入手困難な文献がある。以上の理由から、Westergaardの原著や各種文献を参考に、空港土木施設設計要領（舗装設計編）に掲載されている載荷公式の根拠を確認した。また、Westergaardが定義した剛比半径は「載荷中心」から「たわみの変曲点の位置」及び「曲げ応力が0となる位置」までの距離であること、剛比半径を用いて「載荷中心からの距離」及び「コンクリート版のたわみ、曲げ応力、路盤反力」を無次元化することにより、コンクリート版厚、コンクリートの弾性係数、路盤弾性係数によらず分布が同一となることを確認した。

キーワード：Westergaard, 剛比半径, コンクリート舗装, 空港

* 空港研究部 空港施設研究室 室長

Consideration on Westergaard's Formulas and Radius of Relative Stiffness for Rigid Pavement

TSUBOKAWA Yukitomo*

Synopsis

So called "Westergaard's formulas" presented by Harold Malcolm Westergaard in and after 1920's are most famous as formulas for calculation of stress and deflection in concrete slab of rigid pavement. However, it is difficult to obtain some old original papers presented by Westergaard and other researchers. From this reason, this technical note was written for the purpose of clarifying origin of Westergaard's formulas described in Airport Civil Engineering Facilities Design Manual (Pavement Design) published by Civil Aviation Bureau of MLIT, JAPAN. Furthermore, author confirmed by using multi-layer elastic analysis that (1) radius of relative stiffness which Westergaard defined, l , meant distance from "center of applied load" to "point of inflection of deflection" and "point of contraflexure" as same as figures Westergaard illustrated in 1926, (2) distributions of "deflection at slab surface", "flexural stress at slab bottom" and "base reaction force at base surface" non-dimensionalized by using l with respect to "non-dimensionalized distance from load center" were same regardless of thickness of slab, modulus of elasticity of slab and base.

Key Words: Westergaard, radius of relative stiffness, rigid pavement, airport

* Head, Airport Facilities Division, Airport Department

目 次

1. はじめに	1
2. Westergaard 載荷公式の考察	3
2.1 中央部応力式	3
2.2 自由縁部応力式	8
2.3 中央部たわみ式	12
2.4 自由縁部たわみ式	15
3. 剛比半径の考察	16
3.1 剛比半径とたわみ・曲げモーメントの関係	16
3.2 Winkler 基礎モデルによる検証	17
3.3 弾性基礎モデルによる検証	20
3.4 剛比半径と荷重分散の関係	23
4. 結論	27
5. おわりに	27
参考文献	28

1. はじめに

コンクリート舗装の設計では、コンクリート版上に載荷される交通荷重により、版下面の応力や版表面のたわみを算出することが必要となる。アスファルト舗装とは異なり、コンクリート版には目地が存在するため、目地に設置されているダウエルバーやタイバーを無視すれば、コンクリート版における交通荷重の載荷位置は図-1.1.1 に示すように中央部、自由縁部、隅角部の3種類がある。また、コンクリート舗装の構造解析において、コンクリート版を支持する路盤以深の構造は、図-1.1.2 に示すように、鉛直変位のみに対応する多数の独立した1次元バネで版が支持される Winkler 基礎モデルと、一様な弾性体で版が支持される弾性基礎モデルがある。

コンクリート版の応力・たわみの算出手法の研究成果として最も有名なのは、Harold Malcolm Westergaard が1920年代以降に提案した Winkler 基礎モデルによる載荷公式^{1),2),3),4),5)}である（以下、Westergaard 式という）。Westergaard 式、あるいは、Westergaard の研究成果を基に他の研究者が修正した式は、土木学会による舗装標準示方書⁶⁾、国土交通省航空局による空港土木施設設計要領（舗装設計編）⁷⁾、各種の舗装関連書籍⁸⁾等で広く紹介されている。

Westergaard 式は単一の載荷重を想定した載荷公式であることから、航空機脚荷重のような隣接する複数の載荷重を考慮することはできない。そのため、Pickett と Ray⁹⁾は Westergaard の研究成果^{3),5)}を基に、複数の載荷重による応力・たわみを算出するための影響図を作成した。我が国の空港コンクリート舗装の設計では、この影響図を福手¹⁰⁾が電算化したプログラムが長らく使用されていた。現在は有限要素法を用いることが一般的となっているものの、空港プレキャスト舗装の設計では Westergaard 式が使用されている。

Westergaard 式に関する研究成果は非常に多いものの、以下の理由により、研究成果を追跡し確認することが容易ではない。

- ・ Westergaard 式に関する研究成果は、非常に古い海外文献が多く、入手が困難な文献がある。
- ・ Westergaard 自身が式を何度も修正し発表しているため、文献において「Westergaard 式である」と紹介されていても、どの時点で発表された式かがわかりにくい。
- ・ 載荷公式を簡略化するため、常用対数を自然対数に変換した式や、一部又は全部のポアソン比を 0.15 として変形した式が紹介されている場合も多く、同じ Westergaard 式であるにも関わらず、見掛けは全く異なる式に見える。
- ・ lb-inch 単位系の式が、kgf-cm 単位系や N-mm 単位系の式に変形されている場合がある。この場合、単位換算目的で数式に追加された数値項、例えば、cm を mm に換算するための 10 や、inch を cm に換算するための 2.54 に関する言及がない場合が多く、原著における実験結果由来の数値項と誤解される場合もある。

以上の理由から、Westergaard による原著や各種文献を参考に、空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載されている載荷公式の根拠を整理することを目的として本資料を作成した。また、Westergaard が定義した剛比半径の特性について、本邦の大多数の文献では「荷重分散の程度を表す指標」と言及されているのみであり、剛比半径に関する詳細な解説がないことから、構造解析を実施し、剛比半径の特性について考察した。

なお著者は、Westergaard による原著のうち、会議プロシーディングスである1939年の文献³⁾を入手できていないが、その内容を確認する資料として Ioannides ら¹¹⁾の文献を参考とした。Ioannides らは概要において「Westergaard の載荷公式は、その後の出版物において、しばしば誤って引用または適用されてきた。」と記した上で、Westergaard による多くの成果が丁寧に整理されており、本資料の目的に合致すると考えたためである。

本資料は、中央部及び自由縁部の載荷公式の根拠や剛比半径の特性を整理することを目的としたため、それぞれの載荷公式の理論的背景や実験結果等に関する整理、使用頻度の低い隅角部の載荷公式に関する整理は省略している。また、本資料では多くの文献を引用するが、式に使用されている変数記号が文献により異なり、原著からそのまま引用すると混乱するため、変数記号を統一している。

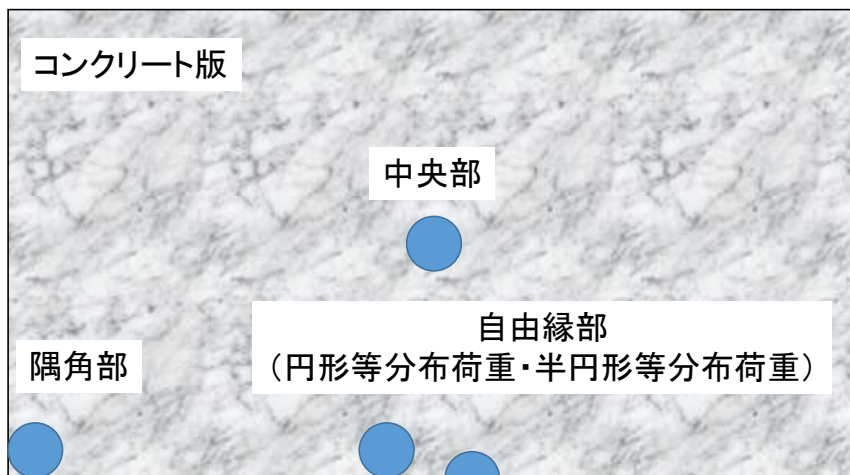


図-1.1.1 コンクリート版における荷重位置の平面図

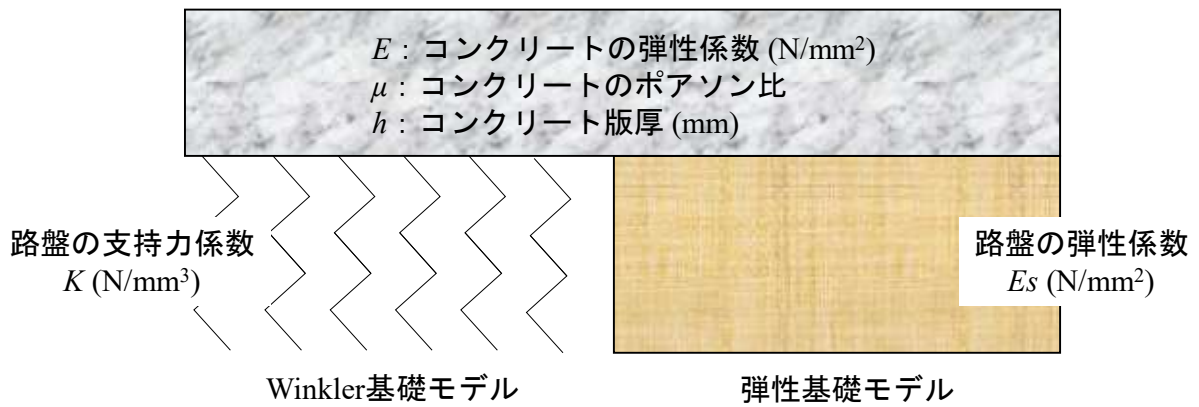


図-1.1.2 Winkler 基礎モデルと弾性基礎モデル

2. Westergaard 載荷公式の考察

2章では、載荷中心の応力及びたわみを算出する載荷公式について考察する。

2.1 中央部応力式

空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載されている中央部応力式について整理する。なお、以降に示す応力式では、lb-inch 単位系、kgf-cm 単位系、N-mm 単位系のいずれを使用しても、算出される応力はそれぞれ psi, kgf/cm², N/mm² となるため、単位系の違いを気にする必要はない。

空港土木施設設計要領（舗装設計編）に掲載されている中央部応力式。

$$\sigma_i = 0.0547 \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 10.186 \cdot \ln \left(\frac{b}{l} \right) + 3.714 \right\} \quad \dots \quad \text{式-2.1.1}$$

ここで、

- σ_i : コンクリート版中央部下面の応力 (N/mm²)
- P : 載荷重 (N)
- h : コンクリート版厚 (mm)
- b : $r < 1.724h$ の場合, $b = \sqrt{1.6r^2 + h^2} - 0.675h$ (mm)
 $r \geq 1.724h$ の場合, $b = r$ (mm)
- r : 載荷重の接地半径 (mm)
- l : 剛比半径 (mm) $= \sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot K}}$
- E : コンクリートの弾性係数 (N/mm²)
- μ : コンクリートのポアソン比
- K : 路盤の支持力係数 (N/mm³)

この応力式について、山家ら¹²⁾は図-2.1.1に示すように「ドイツの空港 PC 舗装設計施工規準では・・・次の Westergaard の修正式を与えている」と記載している。著者は当該文献を入手できていないが、Westergaard 修正式とされていることから、Westergaard の中央部応力式に関する研究成果を整理することとした。

Westergaard による中央部応力式¹⁾。

$$\sigma_i = \frac{3P(1 + \mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6159 \right\} \quad \dots \quad \text{式-2.1.2}$$

式-2.1.2 は 1926 年に Westergaard が発表した最初の中央部応力式であるが、数値項を一般化して 1933 年に発表したのが式-2.1.3 である。これを変形した式-2.1.4 や、一部のポアソン比を 0.15 とした式-2.1.5、式-2.1.6 が引用されている場合もあり、常用対数を自然対数に変換した式-2.1.7 は式-2.1.2 とほぼ一致する。そのため、一見ただけでは判別が難しいものの、式-2.1.2 から式-2.1.7 は全て同一の応力式である。

3. PC 舗装版の設計方法

3.1 荷重による応力度

PC舗装版は、普通のコンクリート舗装版より薄いので概して荷重による応力およびたわみが大きい、プレストレスの影響によって舗装版にひびわれが発生した後でもかなりの弾性的性質が持続されることが多くの実験(3,4)によって確かめられている。したがって荷重による応力とたわみの小さい、ひびわれのない完全な弾性体を対象とした在来の応力とたわみの計算式はPC舗装には適当とは云いがたい。

しかし一方ではPC舗装のための実用的な計算式も確立されるには至らず一般的には Westergaard の中央載荷公式(5,6) が用いられている。

これはPC舗装では、車線方向およびこれと直角方向にもプレストレスを導入して舗装版の連続性が保たれるためである。

ドイツの「空港PC舗装設計施工規準(7)」では、荷重中心下における舗装版の下縁に働く最大引張応力度 σ_t を求める式として、次の Westergaard の修正式を与えている。

$$\sigma_t = 0.0547 \frac{P}{h^2} \left[\left(\frac{b}{l} \right)^2 - 10.186 \log_0 \frac{b}{l} + 3.714 \right] \dots \dots \dots (3.1)$$

ここで、 p ; 舗装にタイヤを通して伝えられる荷重
 h ; コンクリート舗装版厚
 E ; コンクリートのヤング係数
 k ; 路盤支持力係数
 l ; 剛比半径

コンクリートのポアソン比 $\mu = 1/6$ とした場合剛比半径は次式で表わされる。

$$l = \sqrt[4]{\frac{3Eh^3}{35k}} \dots \dots \dots (3.2)$$

a ; p が等分布するときの円形載荷面積の半径
 $a < 1.724h$ のとき

$$b = \sqrt{1.6a^2 + h^2} - 0.675h \dots \dots \dots (3.3)$$

$a \geq 1.724h$ のとき

$$b = a \dots \dots \dots (3.4)$$

建設省土木研究所で実施されたPC舗装の試験結果(8,9)によると、荷重と舗装版表面のひずみの分布は図-11および図-12のような関係を示し、PC舗装のひずみはひびわれ発生前は Westergaard の公式による計算値と比較的よく一致するが、ひびわれ発生後は発生前とかなり異なる性質を示す。しかしひびわれ発生後も荷重の増加と直線関係を示し、かなりの弾性を持続することが明らかである。

荷重の増加に従ってひずみも増加するがひびわれの発生はおそらく表面に達しにくい。

図-2.1.1 山家らによる港研資料からの引用(港湾空港技術研究所提供)¹²⁾

Westergaard による中央部応力式.

$$\sigma_t = 0.275 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) \dots \dots \dots \text{式-2.1.3}^{2)}$$

$$= \frac{1.1}{4} \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \log_{10} \left(\frac{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot l^4}{b^4} \right)$$

$$= 1.1 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10} \left(\frac{l}{b} \right) + \frac{1}{4} \cdot \log_{10} \{ 12 \cdot (1 - \mu^2) \} \right\} \dots \dots \dots \text{式-2.1.4}^{8)}$$

$$= 1.1 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10} \left(\frac{l}{b} \right) + \frac{1}{4} \cdot \log_{10} \{ 12 \cdot (1 - 0.15^2) \} \right\}$$

$$= 1.1 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10} \left(\frac{l}{b} \right) + \frac{1}{4} \cdot \log_{10} (11.73) \right\}$$

$$= 1.1 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10} \left(\frac{l}{b} \right) + 0.2673 \right\} \dots \dots \dots \text{式-2.1.5}^{13)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1.1}{4} \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ 4 \cdot \log_{10} \left(\frac{l}{b} \right) + 4 \cdot 0.2673 \right\} \\
 &= 0.275 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ 4 \cdot \log_{10} \left(\frac{l}{b} \right) + 1.0692 \right\} \quad \dots \dots \dots \text{式-2.1.6}^{24)} \\
 &= 0.275 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ 4 \cdot \ln \left(\frac{l}{b} \right) / \ln(10) + 1.0692 \right\} \\
 &= \frac{0.275 \cdot 4}{\ln(10)} \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 1.0692 \cdot \frac{\ln(10)}{4} \right\} \\
 &= \frac{3}{2\pi} \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6155 \right\} \\
 &= \frac{3P(1 + \mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6155 \right\} \quad \dots \dots \dots \text{式-2.1.7}
 \end{aligned}$$

アメリカの Bureau of Public Roads が実施した Arlington Test の結果を受け、Westergaard は 1933 年に式-2.1.3 に応力低減項を追加し式-2.1.8 のように修正している^{2), 14), 15)}。この応力低減項は「元々の理論では、路床からの反力はたわみに比例するとしていたが、中央載荷の場合に限定した追加理論として、もし路床が連続体であれば、路床からの反力は載荷中心近傍に集中することが予想されるため、載荷重遠方における路床反力を減らし、載荷中心近傍における路床反力を増加させるという再配分を導入するため」との目的により導入されたものである。言い換えれば、Westergaard は路盤以深の構造として Winkler 基礎モデルを前提としていたが、実現象に近いと考えられる弾性基礎モデルを意識した修正と言える。

式-2.1.3 に応力低減項が追加された応力式 (L は長さの単位を有するパラメータ, Z は無次元パラメータ)^{2), 14), 15)},

$$\sigma_i = 0.275 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) - 54.54 \cdot \left(\frac{l}{L} \right)^2 \cdot Z \right\} \quad \dots \dots \dots \text{式-2.1.8}$$

応力低減項のパラメータである L と Z は、載荷中心から半径 L の範囲内において、後述する式-2.3.3 の中央部たわみ式によるたわみが、たわみに Z を乗じた分だけ減少することを表すパラメータである。各種文献では表-2.1.1 のように言及されている。そこで、式-2.1.8 において $L = 5 \cdot l$, $Z = 0.2$ を入力すると式-2.1.9 となり、式-2.1.2 を用いて表せば式-2.1.10 となる。

表-2.1.1 各種文献において言及されている L と Z

L	Z	備考
$5 \cdot l$	0.39	弾性基礎と仮定した場合の値であり、実際の Z は 0~0.39 の間と予想されている ^{2), 15)} 。
$1.75 \cdot l$	0.05	Arlington Test の結果 ^{14), 15)}
$5 \cdot l$	0.20	暫定案 ^{14), 15)}

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 0.275 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) - 54.54 \cdot \left(\frac{l}{5 \cdot l} \right)^2 \cdot 0.2 \right\} \\ &= 0.275 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) - 0.4363 \right\} \\ &= 0.275 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) - 0.12 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \quad \dots \dots \dots \text{式-2.1.9} \end{aligned}$$

$$= \frac{3P(1 + \mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6159 \right\} - 0.12 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} \quad \dots \dots \dots \text{式-2.1.10}$$

その後、Westergaard は 1939 年に式-2.1.2 に応力増加項を追加し式-2.1.11 のように修正している³⁾。著者は会議プロシーディングスである当該文献を入手できていないが、1943 年の Westergaard の文献⁴⁾や Ioannides らの文献¹¹⁾で応力増加項を確認できる。Ioannides らによれば、この応力増加項は「載荷面積の影響を考慮するために追加された項」とされている。

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{3P(1 + \mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6159 + \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{3P(1 + \mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6159 \right\} + \frac{3P(1 + \mu)}{64h^2} \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2 \quad \dots \dots \dots \text{式-2.1.11} \end{aligned}$$

以上を整理すると、Westergaard が提案した中央部応力式には、以下の 3 つの応力成分がある。

- ・ 基本項 式-2.1.2
- ・ 応力低減項 式-2.1.10 の末尾項
- ・ 応力増加項 式-2.1.11 の末尾項

そこで、基本項、応力低減項、応力増加項を全て合算すると式-2.1.12 となる。

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{3P(1 + \mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6159 \right\} - 0.12 \cdot (1 + \mu) \cdot \frac{P}{h^2} + \frac{3P(1 + \mu)}{64h^2} \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2 \\ &= \frac{3(1 + \mu)}{2\pi} \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6159 - \frac{2\pi \cdot 0.12}{3} + \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{\pi}{32} \cdot \frac{3(1 + \mu)}{2\pi} \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \frac{32}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{l}{b} \right) + \frac{32}{\pi} \cdot 0.3646 + \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{3(1 + \mu)}{64} \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \frac{32}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{b}{l} \right) + 3.714 \right\} \\ &= \frac{3(1 + \mu)}{64} \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 10.186 \cdot \ln \left(\frac{b}{l} \right) + 3.714 \right\} \quad \dots \dots \dots \text{式-2.1.12} \end{aligned}$$

ここで図-2.1.1を見るに、剛比半径の算出においてポアソン比を1/6としていることから、式-2.1.12のポアソン比を1/6として変形すると式-2.1.13となり、これは式-2.1.1と一致する。

$$\sigma_i = 0.0547 \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 10.186 \cdot \ln \left(\frac{b}{l} \right) + 3.714 \right\} \dots \dots \dots \text{式-2.1.13}$$

以上のことから、空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載の式-2.1.1は、Westergaardによる基本項、応力低減項、応力増加項を合算した式-2.1.12に、ポアソン比として1/6を入力した応力式であると推測される。なお、表-2.1.2の条件において応力式の各成分を試算した結果を表-2.1.3に示すが、応力増加項の寄与は非常に小さく、応力低減項の寄与が非常に大きいことがわかる。

表-2.1.2 試算条件

P	: 載荷重 (B747-400の輪荷重)	= 227,500 N
μ	: コンクリートのポアソン比	= 1/6 = 0.167
h	: コンクリート版厚	= 240 mm
l	: 剛比半径	= 876 mm
E	: コンクリートの弾性係数	= 35,000 N
K	: 路盤の支持力係数	= 0.07 N/mm ³
b	: $r < 1.724h$ の場合, $b = \sqrt{1.6r^2 + h^2} - 0.675h$ $r \geq 1.724h$ の場合, $b = r$	= 214 mm
r	: 載荷重の接地半径	= 229 mm

表-2.1.3 中央部応力式の各成分の試算

応力成分	応力式	応力 (N/mm ²)	Dに対する比率 (%)
A: 基本項 式-2.1.2	$\frac{3P(1+\mu)}{2\pi h^2} \cdot \left\{ \ln \left(\frac{l}{b} \right) + 0.6159 \right\}$	4.46	113.8
B: 応力低減項 式-2.1.10の末尾項	$-0.12 \cdot (1+\mu) \cdot \frac{P}{h^2}$	-0.55	-14.1
C: 応力増加項 式-2.1.11の末尾項	$\frac{3P(1+\mu)}{64h^2} \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2$	0.01	0.3
D: A~Cの和		3.92	100.0
設計要領の応力式 式-2.1.1	$0.0547 \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left\{ \left(\frac{b}{l} \right)^2 - 10.186 \cdot \ln \left(\frac{b}{l} \right) + 3.714 \right\}$	3.92	100.0

2.2 自由縁部応力式

空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載されている自由縁部応力式について整理する。なお、以降に示す応力式では、一部において単位系の影響を受ける項があるため留意する必要がある、

空港土木施設設計要領（舗装設計編）に掲載されている自由縁部応力式。

$$\sigma_e = (1 + 0.54\mu) \cdot C \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{l}{10} \right) - 0.75 \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{10} \right) - 0.18 \right] \quad \dots \quad \text{式-2.2.1}$$

ここで、

- σ_e : コンクリート版自由縁部下面の応力 (N/mm²)
- μ : コンクリートのポアソン比
- C : 係数（自由縁部に対して 2.12，適当量のダウエルバーを用いた目地部に対して 1.59）
- P : 載荷重 (N)
- h : コンクリート版厚 (mm)
- l : 剛比半径 (mm) $= \sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot K}}$
- E : コンクリートの弾性係数 (N/mm²)
- K : 路盤の支持力係数 (N/mm³)
- r : 載荷重の接地半径 (mm)

この応力式について、赤塚ら¹⁶⁾は図-2.2.1に示すように「Westergaardの縁部公式を実験的に修正した Teller と Sutherland の式を更に実験に基づいて修正した岩間の式」としている。そのため、まずは Westergaard による自由縁部応力式の式-2.2.2 と、Teller と Sutherland による Westergaard 修正式の式-2.2.3 を基に整理することとした。なお、Westergaard は自由縁部応力式の研究初期において、本邦ではあまりなじみのない半円形等分布荷重を想定したため、式-2.2.2 と式-2.2.3 は半円形等分布荷重を想定した応力式である。Westergaard は別途、円形等分布荷重を想定した自由縁部応力式も提案している¹¹⁾が、ここでは省略する。

Westergaard による自由縁部応力式（半円形等分布荷重の場合）^{2), 11)}。

$$\sigma_e = 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) - 0.71 \right] \quad \dots \quad \text{式-2.2.2}$$

ここで、

- b : $r < 1.724h$ の場合、 $b = \sqrt{1.6r^2 + h^2} - 0.675h$
- $r \geq 1.724h$ の場合、 $b = r$

式-2.2.2 を修正した Teller と Sutherland による自由縁部応力式¹⁴⁾（半円形等分布荷重の場合。ただし長さの単位は inch である）。

$$\sigma_e = 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) + \log_{10} \left(\frac{b}{1 - \mu^2} \right) - 1.079 \right] \quad \dots \quad \text{式-2.2.3}$$

3.3. 我が国の道路舗装設計方法との比較

1) 我が国のコンクリート道路舗装の考え方

我が国ではコンクリート道路舗装の版厚を設計する場合には交通量によって、20, 23, 25 cm の3種のいずれかを選び、路盤の支持力は $K_{30} \geq 15 \text{kg/cm}^3$ ($K_{75} \div 7 \text{kg/cm}^3$) になるように設計している。ただし、路盤の支持力が特に大きい場合とか交通量が特に大きい場合には、Westergaard の縁部公式を実験的に修正した Teller と Sutherland の式を更に実験に基づいて修正した岩間の式(1)によって設計している。これは、車輪の走行位置による縁部応力の減少、交通走行頻度と交通量、車線幅および車線数、路肩の条件、更に温度応力の組合わせを考慮して応力を算出し、コンクリートの疲労抵抗を考慮することによって最終的に版厚を決定する方法である。この方法による施工例の供用実績と岩間によるコンクリート舗装の実験結果はこの実験式が最も妥当であることを示している。現場における調査結果もコンクリート版の縁部が弱点であることを示し、本式の妥当性を実証している。岩間によればコンクリート版の荷重応力は次式によって求められる。

$$\sigma = (1 + 0.54\mu) \times C \times \frac{P}{h^2} (\log l - 0.75 \log a - 0.18)$$

図-2.2.1 赤塚らによる港研資料からの転載（港湾空港技術研究所提供）¹⁶⁾

まず、式-2.2.2 の Westergaard 式において、一部のポアソン比を 0.15 として変形すると式-2.2.4 となり、後述する岩間の文献に記載されている Westergaard 式と一致する。

$$\begin{aligned} \sigma_e &= 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) - 0.71 \right] \\ &= 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot l^4}{b^4} \right) - 0.71 \right] \\ &= 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[4 \cdot \log_{10} \left(\frac{l}{b} \right) + \log_{10}(11.73) - 0.71 \right] \\ &= 2.116 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{l}{b} \right) + 0.090 \right] \quad \dots \dots \dots \text{式-2.2.4} \end{aligned}$$

次に、式-2.2.3 の Westergaard 修正式を変形するが、Teller と Sutherland による修正部分には長さの単位が影響する項を含むため、長さの単位を inch から cm に修正すると式-2.2.5 となり、これも後述する岩間の文献に記載されている Teller と Sutherland による応力式と一致する。

$$\begin{aligned} \sigma_e &= 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{Eh^3}{Kb^4} \right) + \log_{10} \left(\frac{b/2.54}{1 - \mu^2} \right) - 1.079 \right] \\ &= 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot l^4}{b^4} \right) + \log_{10} \left(\frac{b}{2.54} \right) - \log_{10}(1 - \mu^2) - 1.079 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10}(12) + 4 \cdot \log_{10}\left(\frac{l}{b}\right) + \log_{10}\left(\frac{b}{2.54}\right) - 1.079 \right] \\
 &= 4 \cdot 0.529 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10}\left(\frac{l}{b}\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_{10}\left(\frac{b}{2.54}\right) \right] \\
 &= 2.116 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10}\left(\frac{l}{b}\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_{10}\left(\frac{b}{2.54}\right) \right] \quad \dots \dots \dots \text{式-2.2.5}
 \end{aligned}$$

最後に、図-2.2.1 に示すように、岩間¹³⁾は半円形等分布荷重ではなく円形等分布荷重を想定した応力式とするため、式-2.2.5において b を $0.9\sqrt{2} \cdot r$ に置き換える修正を施しており、岩間による応力式は式-2.2.6 となる。

b) 自由縁部応力式 Westergaard の縁部応力式は、スプリング路盤の仮定にもとづいたものであって、

$$\sigma_e = 2.116(1 + 0.54\mu) \frac{P}{h^2} \left[\log_{10} \frac{l}{b} + 0.090 \right] \quad (9)$$

Teller & Sutherland の縁部応力式は、実験公式であって

$$\sigma_e = 2.116(1 + 0.54\mu) \frac{P}{h^2} \left[\log_{10} \frac{l}{b} + \frac{1}{4} \log_{10} \frac{b}{2.54} \right] \quad \dots \dots \dots (10)$$

式(9),(10)で

σ_e : コンクリート版の自由縁部の最大応力(kg/cm²)
 b : 式(11)で与えられる等価接地半径(cm)

$$\left. \begin{aligned}
 b &= \sqrt{1.6a^2 + h^2} - 0.675h & a < 1.724h \text{ の場合} \\
 b &= a & a \geq 1.724h \text{ の場合}
 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (11)$$

コンクリート舗装の構造設計に関する実験的研究 33

る。しかし Westergaard の公式は、半円形載荷板に全荷重が加えられることを、仮定してつくられたものである。車輪が縦縁上を通ることを考えれば、半円載荷状態は実際に起こりうるが、半円上にはおおむね 1/2 の荷重しか加えられず、もっともきびしい載荷状態は、全円上に全荷重を加えた場合である。本研究においては、Teller & Sutherland の公式のほうがむしろよく合うと考え、半径 a の全載荷板と半径 $\sqrt{2}a$ の半円載荷板は、ほぼ相等しいことおよび式(11)を簡略にして $b \approx 0.9a$ とすることによってこれを修正した。

$$\begin{aligned}
 \sigma_e &= 2.116(1 + 0.54\mu) \frac{P}{h^2} \\
 &\times \left[\log_{10} \frac{l}{0.9\sqrt{2}a} + 0.25 \log_{10} \frac{0.9\sqrt{2}a}{2.54} \right] \\
 &\approx 2.12(1 + 0.54\mu) \frac{P}{h^2} \\
 &\times [\log_{10} l - 0.75 \log_{10} 9 - 0.18] \quad \dots \dots \dots (20)
 \end{aligned}$$

式(20)の計算値は表-7に示したが、表-6の実測値にきわめてよく一致しており、実験公式として十分使用に耐えらるると思われるので、これをコンクリート舗装の設計に用いることを提案したい(この公式はkg-cm単

図-2.2.1 岩間による文献からの転載¹³⁾
 (ただし、式を変形するとわかるが、 $\log_{10}9$ は誤植であり、正しくは $\log_{10}a$ である)

式-2.2.5を修正した岩間による自由縁部応力式¹³⁾(円形等分布荷重の場合.ただし長さの単位はcmである).

$$\begin{aligned} \sigma_e &= 2.116 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{l}{0.9\sqrt{2} \cdot r} \right) + \frac{1}{4} \cdot \log_{10} \left(\frac{0.9\sqrt{2} \cdot r}{2.54} \right) \right] \\ &\approx 2.12 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10}(l) - \frac{3}{4} \cdot \log_{10}(0.9\sqrt{2} \cdot r) - \frac{1}{4} \cdot \log_{10}(2.54) \right] \\ &= 2.12 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10}(l) - \frac{3}{4} \cdot \log_{10}(r) - \left\{ \frac{3}{4} \cdot \log_{10}(0.9\sqrt{2}) + \frac{1}{4} \cdot \log_{10}(2.54) \right\} \right] \\ &= 2.12 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot [\log_{10}(l) - 0.75 \cdot \log_{10}(r) - 0.18] \quad \dots \dots \dots \text{式-2.2.6} \end{aligned}$$

岩間による式-2.2.6は長さの単位をcmとしているため,mmを前提として修正すると式-2.2.7となり,先頭の数値2.12を係数Cに置き換えると式-2.2.1と一致する.なお,末尾の数値項である0.18には,長さの単位をinchからcmに換算するための2.54が含まれていることから,念のため,式-2.2.3から直接,長さの単位をinchからmmに換算する変形を行っても式-2.2.7と一致することを確認している.

式-2.2.6を修正した自由縁部応力式(円形等分布荷重の場合.ただし長さの単位はmmである).

$$\sigma_e = 2.12 \cdot (1 + 0.54\mu) \cdot \frac{P}{h^2} \cdot \left[\log_{10} \left(\frac{l}{10} \right) - 0.75 \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{10} \right) - 0.18 \right] \quad \dots \dots \dots \text{式-2.2.7}$$

以上のことから,空港土木施設設計要領(舗装設計編)に記載の式-2.2.1は,Westergaardによる式-2.2.2をTellerとSutherlandが式-2.2.3に修正し,それを岩間が修正した応力式であることがわかる.

2.3 中央部たわみ式

空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載されている中央部たわみ式について整理する。なお、以降に示すたわみ式では、lb-inch 単位系、kgf-cm 単位系、N-mm 単位系のいずれを使用しても、算出されるたわみはそれぞれ inch, cm, mm となるため、単位系の違いを気にする必要はない。

本資料を執筆している 2022 年 2 月時点の空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載されている中央部たわみ式を式-2.3.1 に示す。先に結論から述べると、この中央部たわみ式は対数の底に誤りがあるため、2022 年 4 月の空港土木施設設計要領（舗装設計編）の改正において修正される予定である。

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot [1 - a_k^2 \{0.217 - 0.3671 \cdot \ln(a_k)\}] \quad \dots \quad \text{式-2.3.1}$$

ここで、

- w_i : コンクリート版中央部のたわみ (mm)
- P : 載荷重 (N)
- K : 路盤の支持力係数 (N/mm³)
- l : 剛比半径 (mm) $= \sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot K}}$
- E : コンクリートの弾性係数 (N/mm²)
- h : コンクリート版厚 (mm)
- μ : コンクリートのポアソン比
- a_k : r/l
- r : 載荷重の接地半径 (mm)

中央部たわみ式について、森口ら¹⁷⁾は図-2.3.1 に示すように「Westergaard 公式から求めることができる」として、さらに山家ら¹²⁾も図-2.3.2 に示すように「Westergaard によれば次式を用いて求めることができる」として、式-2.3.2 を示している。

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 + \left\{ 0.3665 \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{l} \right) - 0.2174 \right\} \cdot \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \quad \dots \quad \text{式-2.3.2}$$

しかしながら式-2.3.1 と式-2.3.2 を比較すると、係数はほぼ一致するものの、対数の底が異なることから、Westergaard の中央部たわみ式に関する研究成果を整理することとした。

Westergaard による中央部たわみ式（集中荷重の場合）^{1), 2)}。

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2} \quad \dots \quad \text{式-2.3.3}$$

その後、Westergaard は 1939 年に円形等分布荷重を想定した中央部たわみ式^{3), 11)}を提案している。著者は会議プロシーディングスである当該文献を入手できていないが、Westergaard が 1948 年に提案した楕円形等分布荷重の中央部たわみ式⁵⁾である式-2.3.4 を用い、楕円の長軸と短軸を $a = b = r$ とした円形等分布荷重の中央部たわみ式が式-2.3.5 である。

(1) 荷重の分配
 タイヤ圧=115psi, 主脚重量=47,300lb (DC-6 A機), 一輪の接地面積=47,300/115=206in², 4 in嵩上げに対する等価荷円径= $a_4 = \sqrt{\frac{206}{\pi}} = 8.11$ in, 6 in既設スラブに対する等価荷円半径= $a_6 = 8.11 + 4 = 12.11$ in (荷重は45°に分布するものと仮定)となる。
 車輪荷重によるたわみは WESTERGAARD 公式から求めることができる。

$$Z = \frac{P}{8kl^2} \left[1 + \left\{ 0.3665 \log_{10} \left(\frac{a}{l} \right) - 0.2174 \right\} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (13)$$

図-2.3.1 森口らによる港研資料からの転載 (港湾空港技術研究所提供) 17)

3.2 荷重による舗装版のたわみ
 コンクリート舗装版の中央部のたわみは Westergaard によれば次式を用いて求めることができる。

$$d_i = \frac{P}{8Kl^2} \left[1 + \left\{ 0.3665 \log_{10} \left(\frac{a}{l} \right) - 0.2174 \right\} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (3.5)$$

図-2.3.1 山家らによる港研資料からの転載 (港湾空港技術研究所提供) 12)

Westergaard による中央部たわみ式 (楕円形等分布荷重及び円形等分布荷重の場合)。

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{a^2 + b^2}{16\pi \cdot l^2} \cdot \ln \left(\frac{Eh^3}{K \left(\frac{a+b}{2} \right)^4} \right) - \frac{a^2 + 4ab + b^2}{16\pi \cdot l^2} \right\} \dots\dots\dots \text{式-2.3.4}$$

$$= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{r^2}{8\pi \cdot l^2} \cdot \ln \left(\frac{Eh^3}{Kr^4} \right) - \frac{3r^2}{8\pi \cdot l^2} \right\} \dots\dots\dots \text{式-2.3.5}$$

式-2.3.5 を変形し, ポアソン比を 0.15 とすると式-2.3.6 となる。

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} \cdot \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{Eh^3}{Kr^4} \right) - \frac{3}{8\pi} \cdot \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{8\pi} \cdot \ln \left(\frac{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot l^4}{r^4} \right) + \frac{3}{8\pi} \right\} \right] \\ &= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{8\pi} \cdot \ln \left(\frac{l^4}{r^4} \right) + \frac{1}{8\pi} \cdot \ln \{ 12 \cdot (1 - \mu^2) \} + \frac{3}{8\pi} \right\} \right] \\ &= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \cdot \left\{ -\frac{4}{8\pi} \cdot \ln \left(\frac{r}{l} \right) + \frac{\ln(11.73) + 3}{8\pi} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cdot \left\{ -\frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r}{l}\right) + \frac{5.462}{8\pi} \right\} \right] \\
 &= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cdot \left\{ -\frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r}{l}\right) + 0.2173 \right\} \right] \\
 &= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cdot \left\{ -\frac{1}{2\pi} \cdot \log_{10}\left(\frac{r}{l}\right) / \log_{10}(e) + 0.2173 \right\} \right] \\
 &= \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cdot \left\{ 0.2173 - 0.3665 \cdot \log_{10}\left(\frac{r}{l}\right) \right\} \right] \quad \dots \dots \dots \text{式-2.3.6}
 \end{aligned}$$

さらに式-2.3.6の r/l を a_k に置き換えると式-2.3.7となるが、式-2.3.1と比較すると対数の底が一致しない。

$$w_i = \frac{P}{8K \cdot l^2} \cdot \left[1 - a_k^2 \{ 0.217 - 0.367 \cdot \log_{10}(a_k) \} \right] \quad \dots \dots \dots \text{式-2.3.7}$$

以上のことから、空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載の式-2.3.1はWestergaard式であるものの対数の底に誤りがあり、常用対数に改めた式-2.3.7が正しいことがわかる。

自然対数としていた式-2.3.1は、国土交通省航空局による

- ・1999～2008年の空港舗装構造設計要領¹⁸⁾
- ・その後継である、2008～2019年の空港舗装設計要領¹⁹⁾
- ・その後継である、2019年～現在の空港土木施設設計要領（舗装設計編）⁷⁾

において、プレキャストコンクリート舗装の照査に使用されている。プレキャスト版に発生する応力から版厚等を決定した後、たわみを算出して1.25mm以下であることを確認する際に使用されるが、算出されるたわみが小さいことから、このたわみ式により版厚が決定されることはない。また、たわみの試算結果を表-2.3.1に示すが、誤りである式-2.3.1によるたわみと、正しい式-2.3.7によるたわみの差は2%程度であり、影響は軽微である。

表-2.3.1 中央部たわみ式による試算

P	: 載荷重 (B747-400の輪荷重)	= 227,500 N
K	: 路盤の支持力係数	= 0.07 N/mm ³
E	: コンクリートの弾性係数	= 35,000 N/mm ²
h	: コンクリート版厚	= 240 mm
μ	: コンクリートのポアソン比	= 0.15
l	: 剛比半径	= 876 mm
r	: 載荷重の接地半径	= 229 mm
a_k	: r/l	= 0.261
w_i	: コンクリート版中央部のたわみ A: 誤りの式-2.3.1による B: 正しい式-2.3.7による たわみ比 A/B	= 0.504 mm = 0.514 mm = 0.98

2.4 自由縁部たわみ式

空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載されている自由縁部たわみ式について整理する。なお、以降に示すたわみ式では、lb-inch 単位系，kgf-cm 単位系，N-mm 単位系のいずれを使用しても，算出されるたわみはそれぞれ inch，cm，mm となるため，単位系の違いを気にする必要はない。

空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載されている自由縁部たわみ式を式-2.4.1 に示す。

$$w_e = \frac{P}{\sqrt{6} \cdot K \cdot l^2} \cdot (1 + 0.4\mu) \quad \dots \dots \dots \text{式-2.4.1}$$

ここで，

w_e : コンクリート版自由縁部のたわみ (mm)

P : 載荷重 (N)

K : 路盤の支持力係数 (N/mm³)

$$l : \text{剛比半径 (mm)} = \sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot K}}$$

E : コンクリートの弾性係数 (N/mm²)

h : コンクリート版厚 (mm)

μ : コンクリートのポアソン比

Westergaard による自由縁部たわみ式は式-2.4.2 であり，式-2.4.1 と一致する。なお，式-2.4.2 は集中荷重を想定したたわみ式であるため，半円形等分布荷重・円形等分布荷重の区別がない。Westergaard は別途，半円形等分布荷重・円形等分布荷重それぞれを想定した自由縁部たわみ式も提案している¹⁾が，ここでは省略する。

Westergaard による自由縁部たわみ式（集中荷重の場合）^{1),11)}。

$$w_e = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1 + 0.4\mu) \cdot \frac{P}{K \cdot l^2} \quad \dots \dots \dots \text{式-2.4.2}$$

以上のことから，空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載の式-2.4.1 は，Westergaard 式であることがわかる。

3. 剛比半径の考察

3 章では、中央部載荷時について、載荷中心から離れた位置の応力及びたわみの分布と剛比半径との関係について考察する。

3.1 剛比半径とたわみ・曲げモーメントの関係

コンクリート版の解析において頻出する剛比半径 (radius of relative stiffness, l) について、本邦では、舗装構造力学の視点から「剛比半径は荷重載荷時のたわみ形状と相関がある」のように剛比半径の特性が言及されている文献²⁰⁾は稀で、大多数の文献では「荷重分散の程度を表す指標」と言及されているのみであり、剛比半径に関する詳細な解説がないことから、1926 年の原著¹⁾を確認し整理することとした。

Westergaard は、解析に繰返し出現する長さの次元を有する項を剛比半径と定義し、解析により算出したたわみを $P/(K \cdot l^2)$ で除した無次元化たわみの分布と、算出した曲げモーメントを P で除した無次元化曲げモーメントの分布を、載荷中心からの距離に応じて整理した図を示している。集中荷重を想定した中央部載荷時の図の概略が図-3.1.1 であるが、これを読み取ると表-3.1.1 に示すように、無次元化たわみと無次元化曲げモーメントが 0 あるいは最大値を示す場所が剛比半径の整数倍の位置にある。特に、載荷中心から剛比半径だけ離れた位置で無次元化曲げモーメントが 0 となっていることから、剛比半径は「載荷中心」から「たわみの変曲点の位置」及び「曲げ応力が 0 となる位置」までの距離に相当すると考えられる。少ないながら「(Internal loading condition) The radius of relative stiffness is the distance from the centre of the applied point load to the point of contraflexure」と言及している文献²¹⁾もある。

そこで以降では、路盤以深を Winkler 基礎モデル及び弾性基礎モデルとした場合の解析を実施し確認することとした。

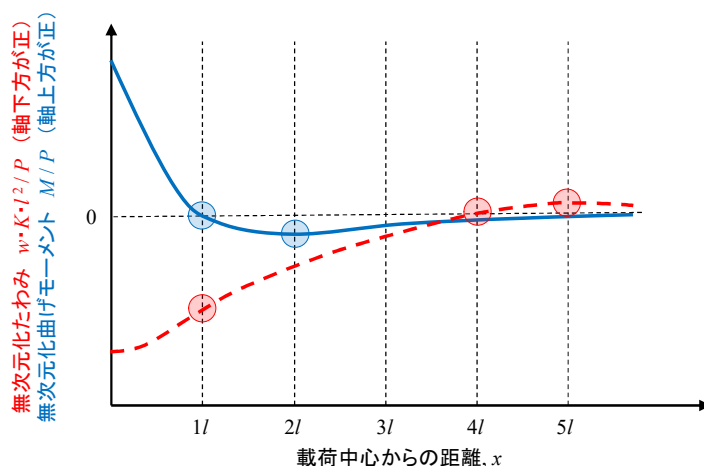


図-3.1.1 Westergaard が示した中央部載荷時の無次元化たわみと無次元化曲げモーメントの分布 (無次元化曲げモーメントはポアソン比が 0.15 の場合)

表-3.1.1 図-3.1.1 における傾向

載荷中心からの距離 x	無次元化たわみ $w \cdot K \cdot l^2 / P$	無次元化曲げモーメント M / P
0	正の最大値	正の最大値
概ね l	次第に 0 に近づく	0
概ね $2 \cdot l$		負の最大値
概ね $4 \cdot l$	0	次第に 0 に近づく
概ね $5 \cdot l$	負の最大値	

3.2 Winkler 基礎モデルによる検証

福手¹⁰⁾による前述の電算プログラムを用いて Winkler 基礎モデルによる解析を実施し、荷重中心からの距離とたわみ・曲げモーメントの関係を整理した。解析では表-3.2.1 に示す種々のパラメータを変化させたが、変化させるパラメータ以外のパラメータは「基本設定値」で固定した。

接地半径 40mm の場合のたわみ分布と曲げモーメント分布を図-3.2.1～図-3.2.3 に示すが、コンクリート版厚、コンクリートの弾性係数、路盤の支持力係数によらず表-3.1.1 と同様の傾向が確認された。

Westergaard に倣い、解析で算出したたわみを $P/(K \cdot l^2)$ で除した無次元化たわみの分布が図-3.2.4 である。コンクリート版厚、路盤の支持力係数、コンクリートの弾性係数を変化させているため、剛比半径は 903～1,437mm の間で変化しているものの、無次元化たわみの分布はほぼ一致することがわかる。しかしながら、この傾向が確認できるのは剛比半径に比して接地半径が小さい場合であり、図-3.2.5 に示すように、接地半径が大きくなるに従い荷重中心近傍の分布は徐々に一致しなくなる。

表-3.2.1 Winkler 基礎モデルにおける解析条件

パラメータ		設定値	基本設定値
P	: 荷重重 (B747-400 の輪荷重)	227,500 N	
K	: 路盤の支持力係数	0.03, 0.07, 0.10 N/mm ³	0.07 N/mm ³
E	: コンクリートの弾性係数	25,000, 35,000, 45,000 N/mm ²	35,000 N/mm ²
h	: コンクリート版厚	250, 350, 450 mm	350 mm
μ	: コンクリートのポアソン比	0.15	
r	: 荷重重の接地半径	40, 200, 500, 1000 mm	40 mm

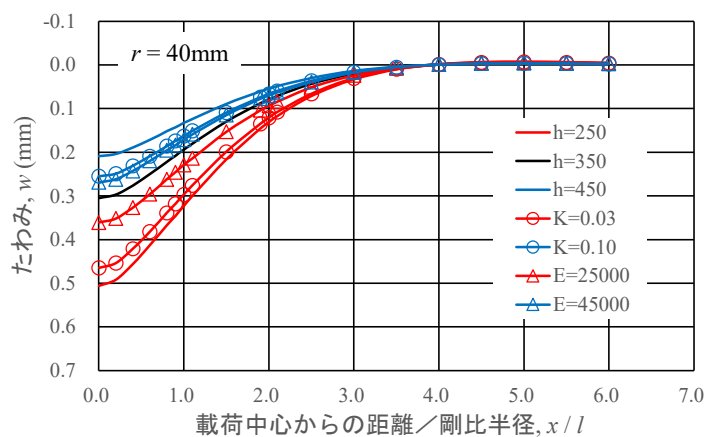


図-3.2.1 接地半径 40mm におけるたわみ分布

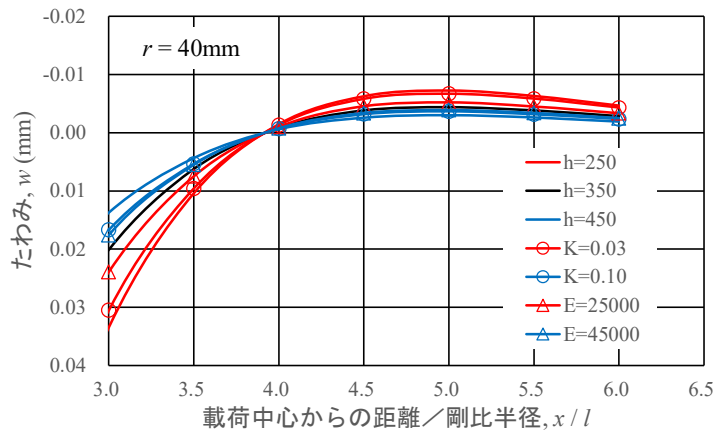


図-3.2.2 接地半径 40mm におけるたわみ分布 (図-3.2.1 の一部を拡大)

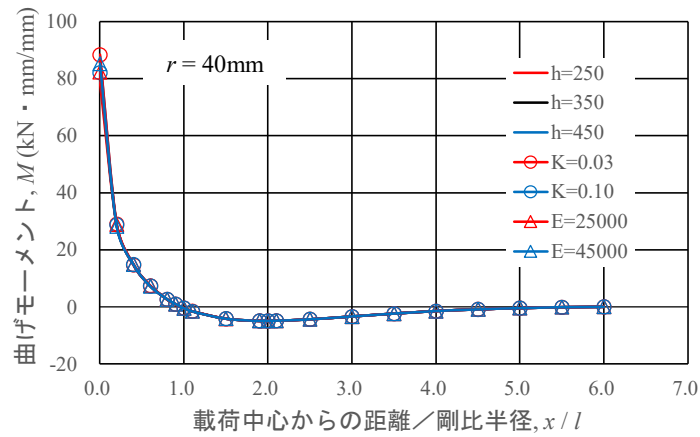


図-3.2.3 接地半径 40mm における曲げモーメント分布

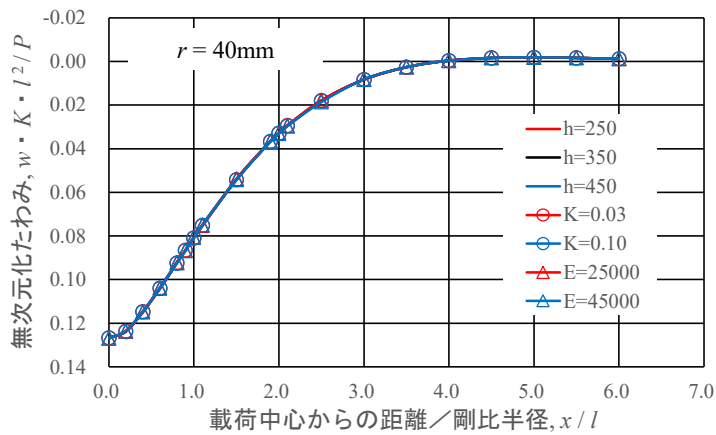


図-3.2.4 接地半径 40mm における無次元化たわみ分布

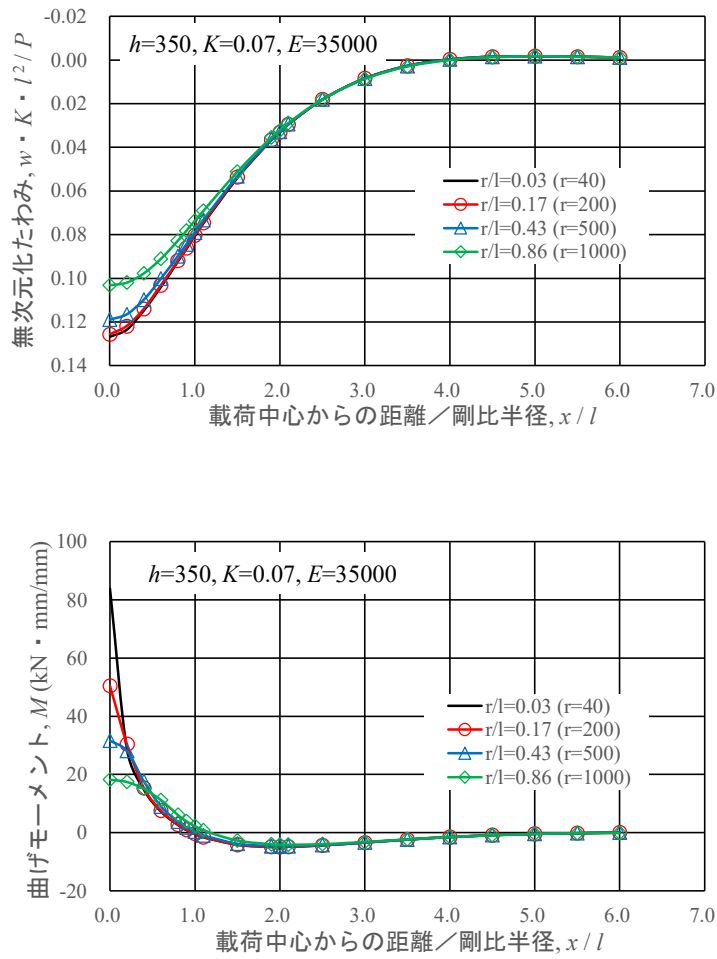


図-3.2.5 接地半径を変化させた場合の無次元化たわみ分布（上図）と曲げモーメント分布（下図）

3.3 弾性基礎モデルによる検証

表-3.3.1の条件で、多層弾性解析プログラム GAMES²²⁾により弾性基礎モデルによる解析を実施し、載荷中心からの距離とたわみ・曲げモーメントの関係を整理した。GAMES では地点ごとの曲げモーメントを算出できないことから、版下面における半径方向の曲げ応力に、単位幅あたりの断面係数 $h^2/6$ を乗じることで曲げモーメントを算出した。載荷中心からの距離は弾性基礎モデルにおける剛比半径^{20),21),23),24)}を式-3.3.1により算出し整理した。また、コンクリート舗装を想定しているため、コンクリート版と路盤の層間はすべる条件(層間すべり率=0.99)としたが、すべらない条件(層間すべり率=0)としても、ほぼ同様の結果が得られる。

表-3.3.1 弾性基礎モデルにおける解析条件

パラメータ		設定値	基本設定値
P	: 載荷重 (B747-400 の輪荷重)	227,500 N	
E	: コンクリートの弾性係数	25,000, 35,000, 45,000 N/mm ²	35,000 N/mm ²
h	: コンクリート版厚	250, 350, 450 mm	350 mm
μ	: コンクリートのポアソン比	0.15	
E_s	: 路盤の弾性係数	100, 300, 500 N/mm ²	300 N/mm ²
h_s	: 路盤厚	無限大	
μ_s	: 路盤のポアソン比	0.35	
r	: 載荷重の接地半径	40, 200, 500, 1000 mm	40 mm
コンクリート版と路盤の層間すべり率		0.99	

$$l_s = \sqrt[3]{\frac{E \cdot h^3 \cdot (1 - \mu_s^2)}{6 \cdot E_s \cdot (1 - \mu^2)}} \dots \dots \dots \text{式-3.3.1}$$

ここで、

- l_s : 弾性基礎モデルにおける剛比半径 (mm)
- E : コンクリートの弾性係数 (N/mm²)
- h : コンクリート版厚 (mm)
- μ : コンクリートのポアソン比
- E_s : 路盤の弾性係数 (N/mm²)
- μ_s : 路盤のポアソン比

接地半径 40mm の場合のたわみ分布と曲げモーメント分布を図-3.3.1 に示す。たわみの分布を見ると、載荷中心から剛比半径の6倍までの範囲において0または負となることはなく、Winkler 基礎モデルの傾向とは異なる結果となったが、曲げモーメントの分布は、剛比半径の概ね1倍の地点で0、概ね2倍の地点で負の最大値となり、コンクリート版厚、コンクリートの弾性係数、路盤の支持力係数によらず表-3.1.1と同様の傾向が確認された。

前節におけるたわみの無次元化方法を参考に、解析で算出したたわみを $P/(E_s \cdot l_s)$ で除した無次元化たわみの分布が図-3.3.2 である。コンクリート版厚、路盤の支持力係数、コンクリートの弾性係数を変化させているため、剛比半径は648~1,309mm の間で変化しているものの、無次元化たわみの分布はほぼ一致することがわかる。なお、弾性基礎モデルの剛比半径はコンクリート版厚 h の1乗に比例するため、実際には $P/(E_s \cdot l_s)$ ではなく $P/(E_s \cdot h)$ で無次元化されている可能性を考慮し確認したが、コンクリート版厚を用いて無次元化した場合は分布が一致することはなかった。

Winkler 基礎モデルと同様に、この傾向が確認できるのは剛比半径に比して接地半径が小さい場合であり、図-3.3.3 に示すように、接地半径が大きくなるに従い載荷中心近傍の分布は徐々に一致しなくなる。

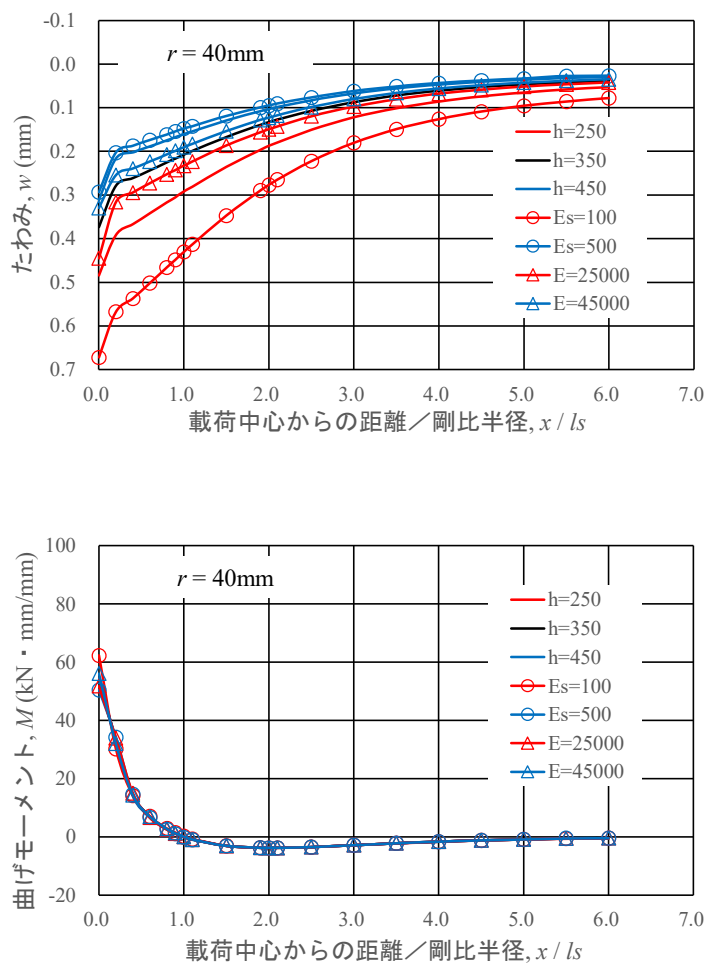


図-3.3.1 接地半径 40mm におけるたわみ分布（上図）と曲げモーメント分布（下図）

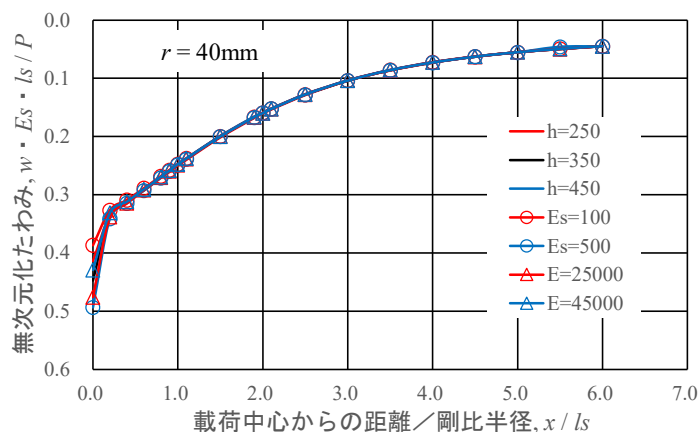


図-3.3.2 接地半径 40mm における無次元化たわみ分布

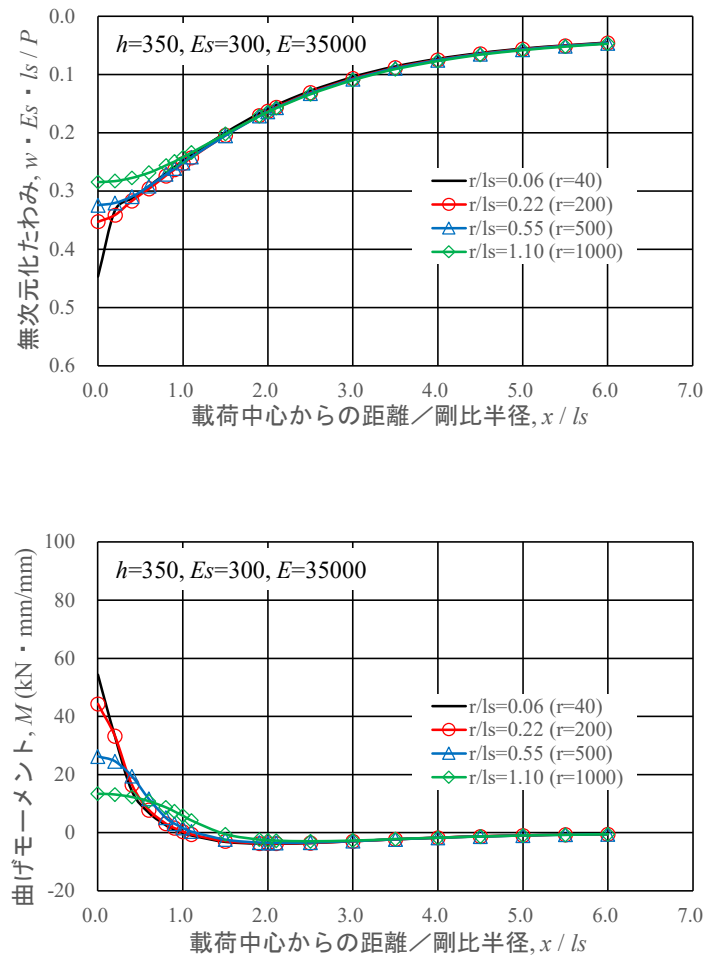


図-3.3.3 接地半径を変化させた場合の無次元化たわみ分布（上図）と曲げモーメント分布（下図）

3.4 剛比半径と荷重分散の関係

前節までに示した通り、Winkler 基礎モデル及び弾性基礎モデルのいずれにおいても、理論上、剛比半径は「载荷中心」から「たわみの変曲点の位置」及び「曲げ応力が 0 となる位置」までの距離に相当すると考えられる。また、剛比半径に比して接地半径が小さい場合、剛比半径を用い無次元化したたわみの分布も一致することが確認できた。

コンクリート版厚，路盤の支持力係数，コンクリートの弾性係数を変化させても無次元化したたわみの分布が一致していることから，コンクリート版のたわみに比例（Winkler 基礎モデルの場合であり，比例係数は路盤の支持力係数 K である）もしくは概ね比例（弾性基礎モデルの場合）すると考えられる路盤上面の路盤鉛直応力分布も，剛比半径を用いることで，コンクリート版厚等を変化させても同一の分布となる可能性がある。文献を調査したところ，弾性基礎モデルにおける载荷中心の路盤鉛直応力として式-3.4.1 が提案されており^{23),24)}，剛比半径を用いて表されていた。

$$q = \frac{P}{3\sqrt{3} \cdot l_s^2} \cdot (1 - 0.552 \cdot a_s + 0.126 \cdot a_s^2) \quad \dots \dots \dots \text{式-3.4.1}$$

ここで，

- q : 路盤上面における载荷中心の路盤鉛直応力 (N/mm²)
- P : 载荷重 (N)
- l_s : 弾性基礎モデルにおける剛比半径 (mm)
- a_s : r/l_s
- r : 载荷重の接地半径 (mm)

そこで本節では，コンクリート版による荷重分散に着目し，路盤上面における路盤鉛直応力の分布と剛比半径の関係を整理した。Winkler 基礎モデルによる福手の電算プログラムは，1 回の解析で 1 点の応答しか出力できず解析に時間を要することから，弾性基礎モデルを対象に多層弾性解析プログラム GAMES で解析を実施した。

前節の表-3.3.1 の解析条件における路盤鉛直応力の分布を図-3.4.1 に示す。前節までの結果と同様に，路盤鉛直応力の分布も相似形と考えられたことから，解析で算出した路盤鉛直応力を P/l_s^2 で除した無次元化路盤鉛直応力の分布が図-3.4.2 である。コンクリート版厚，路盤の支持力係数，コンクリートの弾性係数を変化させているため，剛比半径は 648~1,309mm の間で変化しているものの，無次元化路盤鉛直応力の分布はほぼ一致することがわかる。なお，弾性基礎モデルの剛比半径はコンクリート版厚 h の 1 乗に比例するため，実際には P/l_s^2 ではなく P/h^2 で無次元化されている可能性を考慮し確認したが，コンクリート版厚を用いて無次元化した場合は分布が一致することはなかった。

前節と同様に，この傾向が確認できるのは剛比半径に比して接地半径が小さい場合であり，図-3.4.3 に示すように，接地半径が大きくなるに従い载荷中心近傍の分布は徐々に一致しなくなる。

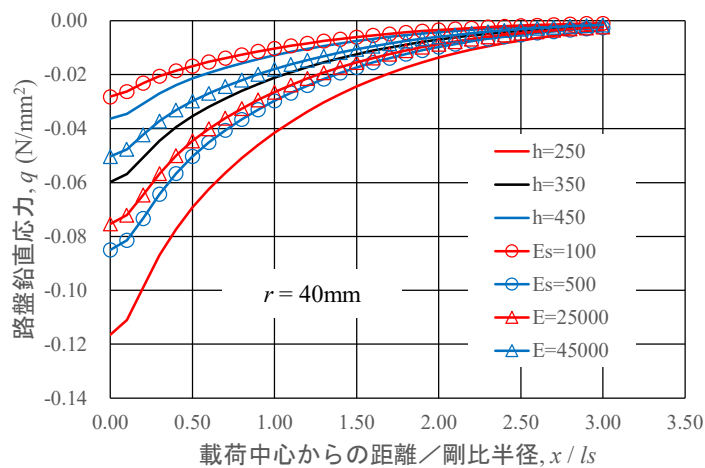


図-3.4.1 路盤上面における路盤鉛直応力分布

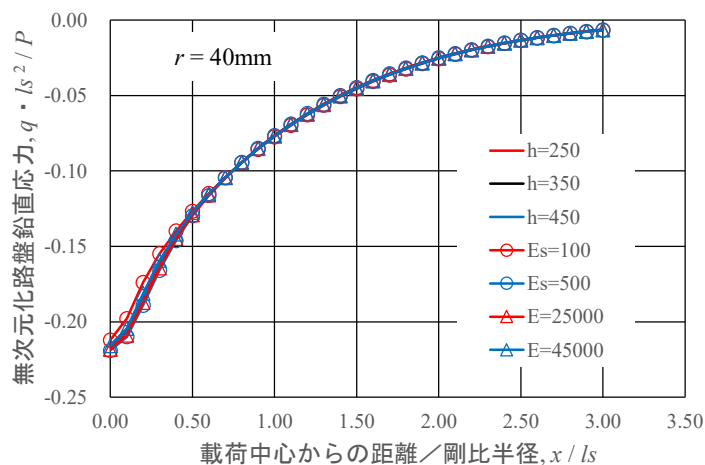


図-3.4.2 路盤上面における無次元化路盤鉛直応力分布

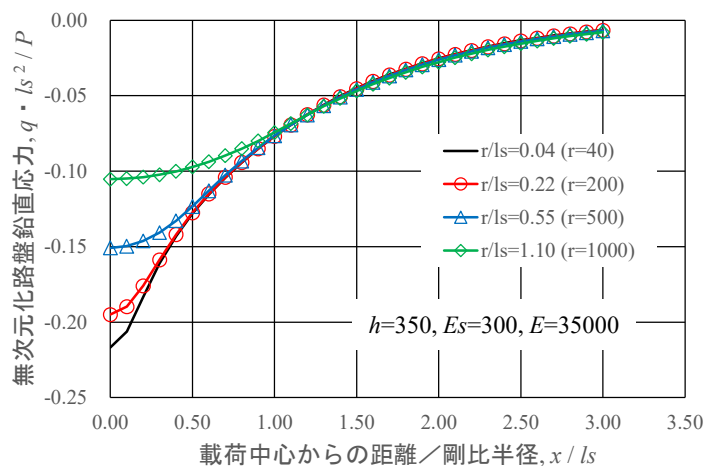


図-3.4.3 接地半径を変化させた場合の無次元化路盤鉛直応力分布

次に、図-3.4.4に示すように、路盤上面において荷重中心から半径 R を有する面積 $\pi \cdot R^2$ の円形範囲を「荷重分散範囲」と定義し、荷重分散範囲内でコンクリート版が路盤から受ける路盤反力（前述の路盤鉛直応力×面積）を整理することとした。解析条件は前節の表-3.3.1とし、以下の手順により路盤反力比（荷重分散範囲内においてコンクリート版が路盤上面から受ける合計路盤反力の、荷荷重に対する割合）を算出した。

- ① 荷重中心からの距離を x とし、 $x = 0 \sim R$ の範囲で $0.1 \cdot l_s$ 毎に、路盤上面の路盤鉛直応力 $q(x)$ を算出する。
- ② $x = 0.1 \cdot (n - 1) \cdot l_s \sim 0.1 \cdot n \cdot l_s$ の区間内の平均路盤鉛直応力 $q_{ave}(n)$ を求め、その区間のリング状の面積 $\Delta A(n)$ を乗じることで、リング状の区間毎の路盤反力 $\Delta F_s(n)$ を算出する。
- ③ $x = 0 \sim R$ の範囲にあるリング状の区間毎の路盤反力を合計し、合計路盤反力 F_s を算出する。
- ④ 合計路盤反力 F_s を荷荷重 P で除し、路盤反力比 F_s/P を算出する。

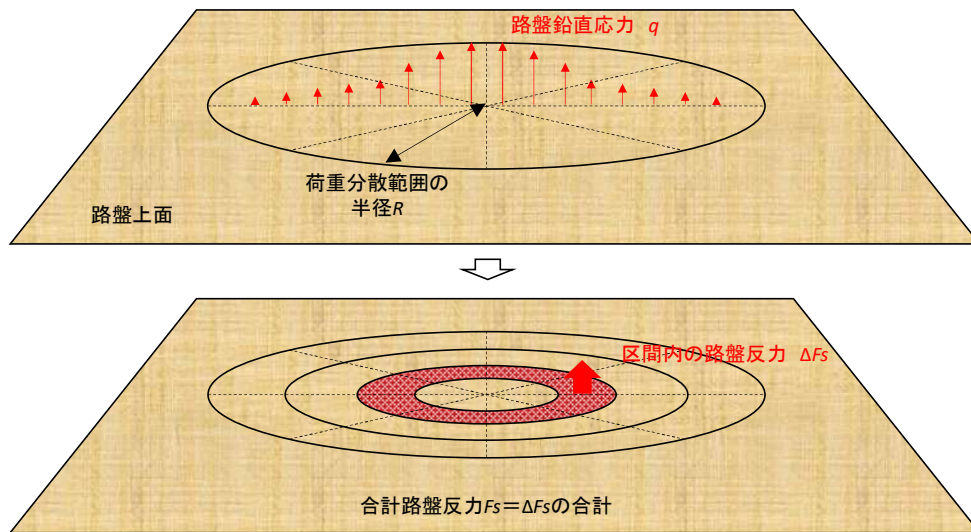


図-3.4.4 合計路盤反力の算出方法

図-3.4.5に荷重分散範囲の半径と路盤反力比の関係を示す。コンクリート版厚、路盤の支持力係数、コンクリートの弾性係数を変化させているため、剛比半径は648~1,309mmの間で変化しているものの、路盤反力比はほぼ一致することがわかる。また、この解析結果より、設定する荷重分散範囲内において路盤がどの程度の荷荷重を分担しているのを定量的に示すことが可能であり、荷重中心から剛比半径の1倍までの荷重分散範囲では荷荷重の概ね36%、剛比半径の2倍までの荷重分散範囲では概ね77%、剛比半径の3倍までの荷重分散範囲では概ね97%の路盤反力を負担していることとなる。

接地半径を大きくした場合の路盤反力比を図-3.4.6、図-3.4.7に示すが、接地半径が剛比半径に比して大きい場合であっても路盤反力比が大きく変化することはなかった。これは図-3.4.3で示したように、接地半径が大きい場合は荷重中心近傍における路盤鉛直応力が大きく低下するものの、荷重中心近傍のリング状の区間毎の面積は比較的小さいことから、合計路盤反力に占める荷重中心近傍の路盤反力の割合が小さいためと考えられる。そのため、接地半径が剛比半径程度であっても、剛比半径の1倍の半径を有する荷重分散範囲において、荷荷重の概ね30%の路盤反力を負担していると考えてよい。なお、アスファルト舗装を想定すれば、剛比半径は表-3.4.1に示すようにコンクリート舗装よりも小さくなるものの、一般に想定される交通荷重の接地半径は概ね剛比半径よりも小さいことから、同様の考え方ができる。

この成果は、例えば図-3.4.8に示すように、荷荷重がコンクリート版により分散された結果である路盤上面の鉛直荷重を入力値として地盤の安定解析を行う場合、コンクリート版や路盤をモデル化した多層弾性解析を用いずとも、路盤上面に付与すべき入力分布荷重を容易に設定することができるメリットがある。

以上で示したように、剛比半径を用いることにより、コンクリート版のたわみ、応力、路盤反力を定量的に推測できるため、舗装構造に関する試験・解析の結果を整理する上で、剛比半径は非常に有用なパラメータであると言える。

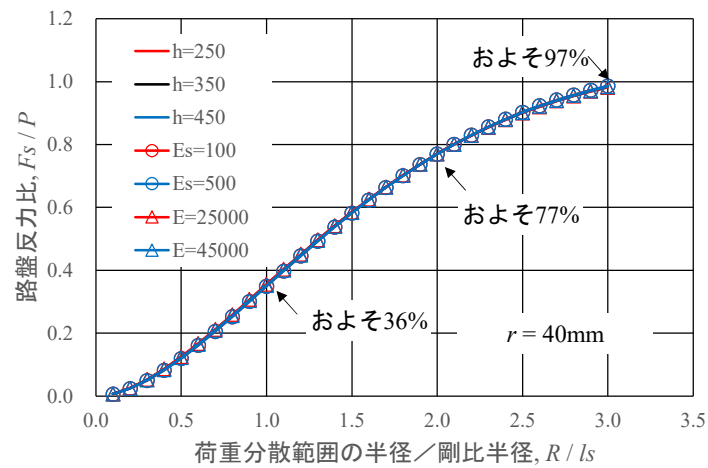


図-3.4.5 荷重分散範囲の半径と路盤反力比

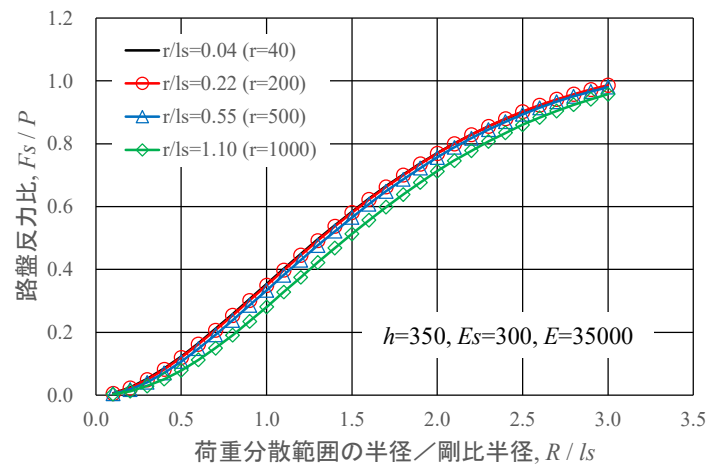


図-3.4.6 接地半径を変化させた場合の荷重分散範囲の半径と路盤反力比

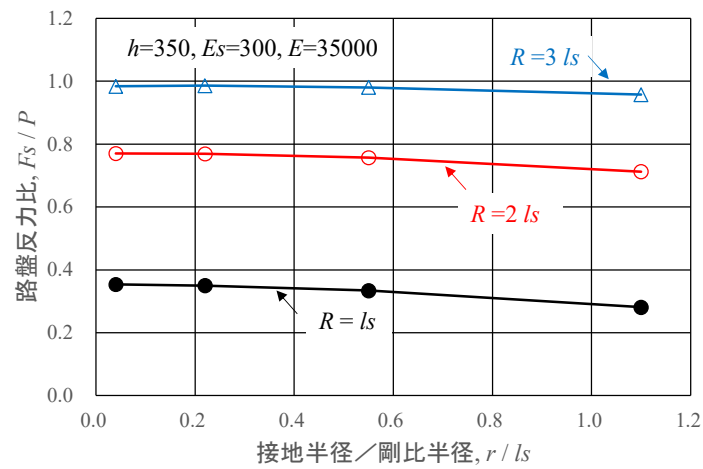


図-3.4.7 接地半径と路盤反力比

表-3.4.1 アスファルト舗装の剛比半径

アスファルト混合物の 弾性係数 (N/mm ²)	剛比半径 (mm)	備考
1,000	206	アスファルト混合物層厚：250 mm アスファルト混合物のポアソン比：0.35 路盤の弾性係数：300 N/mm ² 路盤のポアソン比：0.35
2,000	259	
5,000	351	
10,000	443	

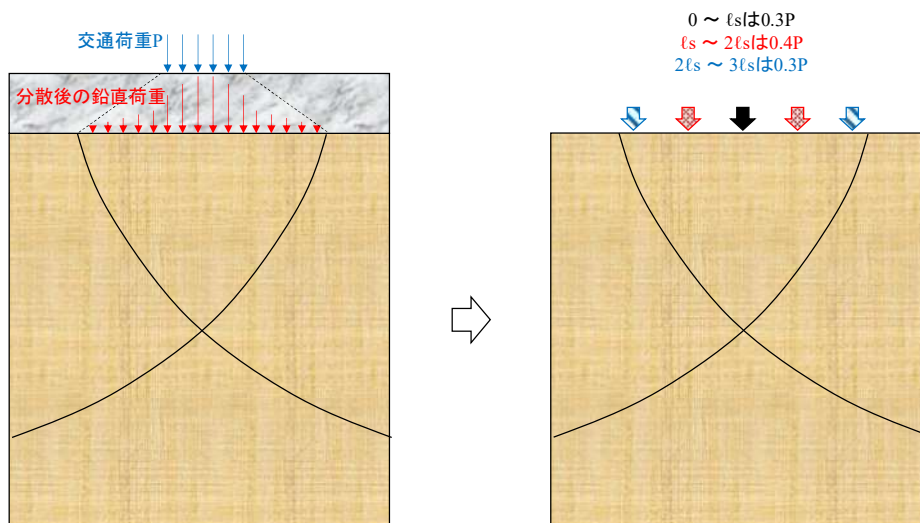


図-3.4.8 地盤安定解析における作用の設定例

4. 結論

本資料における結論を以下に記す。

- (1) 空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載の中央部応力式は、Westergaard による基本項，応力低減項，応力増加項を合算し，ポアソン比として 1/6 を入力した応力式と推測される。
- (2) 空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載の自由縁部応力式は，Westergaard による自由縁部応力式を Teller と Sutherland が修正し，それを岩間が修正した応力式である。
- (3) 空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載の中央部たわみ式は，Westergaard による中央部たわみ式であるものの，自然対数ではなく常用対数が正しい。
- (4) 空港土木施設設計要領（舗装設計編）に記載の自由縁部たわみ式は，Westergaard による自由縁部たわみ式である。
- (5) Westergaard が定義した剛比半径は，理論上は「荷重中心」から「たわみの変曲点の位置」及び「曲げ応力が 0 となる位置」までの距離に相当すると考えられる。
- (6) 剛比半径を用いて「荷重中心からの距離」及び「コンクリート版のたわみ，曲げ応力，路盤反力」を無次元化することにより，分布は同一となる。

5. おわりに

参考文献に記した海外文献は，一部を除き WEB で入手可能であるので，文献名で検索頂きたい。Transaction of ASCE は ASCE Library から有料でダウンロード可能であり，Public Roads は Google Books から無料でダウンロード可能である。また，Westergaard の研究成果がまとめられている Ioannides ら¹⁾の文献は Transportation Research Board の WEB サイトから無料でダウンロード可能である。

(2022 年 1 月 31 日受付)

参考文献

- 1) Westergaard, H.M.: Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analyses, Public Roads, Vol.7, No.2, 1926.
- 2) Westergaard, H.M.: Analytical Tools for Judging Results of Structural Tests of Concrete Pavements, Public Roads, Vol.14, No.10, 1933.
- 3) Westergaard, H.M.: Stresses in Concrete Runways of Airports, Proceedings of the 19th Annual Meeting of the Highway Research Board, 1939.
- 4) Westergaard, H.M.: Stresses Concentration in Plates Loaded over Small Areas, Transaction of ASCE, Vol.108, Paper No.2197, 1943.
- 5) Westergaard, H.M.: New Formulas for Stresses in Concrete Pavements of Airfields, Transaction of ASCE, Vol.113, Paper No.2340, 1948.
- 6) 公益社団法人土木学会 舗装工学委員会：2014年制定 舗装標準示方書，2015.
- 7) 国土交通省航空局：空港土木施設設計要領（舗装設計編）（令和3年4月一部改定），2021.
- 8) 土木学会土構造物および基礎委員会「舗装工学」編集委員会：舗装工学，1995.
- 9) Pickett, G. and Ray, G.K.: Influence Charts for Concrete Pavements, Transaction of ASCE, Vol.116, 1951.
- 10) 福手勤：空港コンクリート舗装厚設計への電算プログラムの応用，港湾技研資料，1977.
- 11) Ioannides, A.M., Thompson, M.R. and Brenberg, E.J.: Westergaard Solutions Reconsidered, Transportation Research Record 1043, 1985.
- 12) 山家馨，赤塚雄三，川口昌宏：プレストレストコンクリート舗装の設計方法に関する調査研究－空港舗装に関する調査研究（第4報）－，港湾技研資料，No.51，1968.
- 13) 岩間滋：コンクリート舗装の構造設計に関する実験的研究，土木学会論文集，No.111，1964.
- 14) Teller, L.W. and Sutherland, E.C.: The Structural Design of Concrete Pavements: Part 5 -An Experimental Study of the Westergaard Analysis of Stress Conditions in Concrete Pavement Slabs of Uniform Thickness, Public Roads, Vol.23, No.8, 1943.
- 15) Kelley, E.F.: Application of the Results of Research to the Structural Design of Concrete Pavements, Public Roads, Vol.20, No.5, 1939.
- 16) 赤塚雄三，飯島尚：無筋コンクリート舗装の設計方法に関する調査研究－空港舗装に関する調査研究（第2報）－，港湾技研資料，No.50，1968.
- 17) 森口拓：空港舗装に関する調査研究（第1報）－空港におけるPC舗装の文献調査－，港湾技研資料，No.40，1967.
- 18) 運輸省航空局：空港舗装構造設計要領，1999.
- 19) 国土交通省航空局：空港舗装設計要領，2008.
- 20) 小関裕二，唐伯明，丸山暉彦：FWD たわみに基づくコンクリート舗装の構造評価に関する一検討，土木学会舗装工学論文集，第3巻，1998.
- 21) Griffiths, G. and Thom, N.: Concrete Pavement Design Guidance Notes, Taylor & Francis, 2007.
- 22) 土木学会舗装工学委員会編：舗装工学ライブラリ 3 多層弾性理論による舗装構造解析入門－GAMES（General Analysis of Multi-layered Elastic System）を利用して－，土木学会，2005.
- 23) 西沢辰男，松野三朗：有限要素法によるコンクリート舗装版の解析，金沢大学工学部紀要，16巻，1号，1983.
- 24) Yang, N.C.: Design of Functional Pavements, McGraw-Hill, 1972.

国土技術政策総合研究所資料

TECHNICAL NOTE of NILIM

No. 1196

March 2022

編集・発行 ©国土技術政策総合研究所

本資料の転載・複写のお問い合わせは
〔〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬 3-1-1
管理調整部企画調整課 電話:046-844-5019〕
E-mail:ysk.nil-46pr@gxb.mlit.go.jp

国土技術政策総合研究所資料

No.1196

コンクリート舗装の Westergaard 載荷公式及び剛比半径の考察

March 2022