

国土技術政策総合研究所資料

TECHNICAL NOTE of
National Institute for Land and Infrastructure Management

No.1293

October 2024

コンクリート舗装の Westergaard中央部載荷プログラムの改良

坪川将丈

Improved Computer Program Based on
Westergaard's Center Loading Formulas for Rigid Pavement

TSUBOKAWA Yukitomo

国土交通省 国土技術政策総合研究所

National Institute for Land and Infrastructure Management
Ministry of Land, Infrastructure, Transport and Tourism, Japan

コンクリート舗装の Westergaard中央部載荷プログラムの改良

坪川将丈*

要 旨

Westergaard, Pickett及びRayによる研究成果を基に、1977年に福手が構築したコンクリート舗装のたわみ・応力を算出するWestergaard中央部載荷プログラムについて、楕円形荷重だけではなく、円形荷重と矩形荷重についても解析可能とすべく、Visual Basic for Applicationsにより再構築した。

本研究におけるプログラムの再構築では、効率的な荷重スキャン方法及びハンケル関数の処理方法について検討し、円形荷重・楕円形荷重・矩形荷重に対する解析が可能となるよう改良した。また、再構築したプログラムを使用し、航空機脚荷重により発生する最大主応力の発生位置と方向の傾向について解析を行い、その結果を考察した。

キーワード：コンクリート舗装，たわみ，応力，Westergaard, Pickett and Ray

* 空港研究部 空港新技術研究官

Improved Computer Program Based on Westergaard's Center Loading Formulas for Rigid Pavement

TSUBOKAWA Yukitomo*

Synopsis

A computer program for calculating deflection and stress of rigid pavements, which was developed by Fukute in 1977 based on the research results of Westergaard, Pickett and Ray, was reconstructed using Visual Basic for Applications to enable analysis of circular and rectangular loads as well as elliptical loads. In the restructuring of the program in this study, an efficient load scanning method and a processing method for the Hankel function were studied, and the program was improved to enable analysis for circular, elliptical and rectangular loads. Using the reconstructed program, an analysis of the location and direction of the maximum principal stress caused by the aircraft landing gear loads was conducted and the results were also discussed.

Key Words: rigid pavement, deflection, stress, Westergaard, Pickett and Ray

* Research Coordinator for Advanced Airport Technology, Airport Department

目 次

1. はじめに	1
2. 現プログラムの概要と改良方針	3
2.1 基礎原理	3
2.2 現プログラムの概要	5
2.3 改良方針	7
3. 新プログラムの詳細	8
3.1 脚荷重角度を有する場合の荷重スキャン方法	8
3.2 矩形荷重に対する荷重スキャン方法	8
3.3 円形荷重及び楕円形荷重に対する荷重スキャン方法	13
3.4 ハンケル関数の処理方法	16
3.5 スキャン角度幅の設定	24
3.6 荷重スキャン範囲の設定	26
3.7 まとめ	28
4. 考察	29
4.1 精度の確認	29
4.2 最大主応力の発生位置及び方向の傾向	32
5. 結論	35
6. おわりに	35
参考文献	36

1. はじめに

コンクリート舗装の設計では、コンクリート版上に荷重される交通荷重により発生する、コンクリート版下面の応力や版表面のたわみを算出することが必要となる。アスファルト舗装とは異なり、コンクリート版には目地が存在するため、コンクリート版間の荷重伝達のために目地に設置されているダウエルバーやタイバーを無視すれば、コンクリート版における交通荷重の荷重位置は図-1.1に示すように中央部、自由縁部、隅角部の3種類がある。また、コンクリート舗装の構造解析において、コンクリート版を支持する路盤以深の構造は、図-1.2に示すように、鉛直変位のみに応答する多数の独立した一次元バネでコンクリート版が支持される Winkler 基礎モデルと、一様な弾性体でコンクリート版が支持される弾性基礎モデルがある。本資料では Winkler 基礎モデルでの中央部荷重を扱う。

コンクリート版の応力・たわみの解析手法の研究成果として最も有名なのは、Harold Malcolm Westergaard が 1920 年代以降に提案した Winkler 基礎モデルによる荷重公式^{1), 2), 3), 4), 5)}である。Westergaard による式、あるいは、Westergaard の研究成果を基に他の研究者が修正した式の詳細については、著者が過去に詳細な文献整理を実施しているので文献⁶⁾を参照頂きたい。

Westergaard による式は単一の荷重重を想定した荷重公式であることから、航空機脚荷重のような隣接する複数の荷重重を考慮することはできない。そのため、Pickett と Ray⁷⁾は Westergaard の研究成果^{3), 5)}を基に、複数の荷重重による応力・たわみを算出するための影響図を作成した。我が国の空港コンクリート舗装の設計では、この影響図を 1977 年に福手⁸⁾が電算化した Westergaard 中央部荷重プログラムが長らく使用されてきた。以降では、このプログラムを現プログラムと呼称する。現プログラムは Fortran により記述されており、ソースコード及び実行 exe ファイルは空港施設研究室に現存する。しかしながら、今後の OS の更新等により実行 exe ファイルが動作しなくなる可能性もあること、任意の位置のたわみや、任意の位置・方向の応力を算出する際の条件入力がやや煩雑であること、考慮可能な荷重重が楕円形荷重のみであることから、福手による港研資料⁸⁾及び現プログラムのソースコードを参考に、現プログラムを VBA (Visual Basic for Applications) により再構築することとした。再構築したプログラムを以降では新プログラムと呼称する。

本資料は、新プログラムの今後の保守・改良を意識し、新プログラムにおける処理方法の詳細を記録することを目的として執筆した。なお、本資料に示す解析で使用する角度は radian 単位であるが、わかりやすさを優先し、本文中では角度を度単位で記述している。また、本資料では表-1.1 に示す用語を用いている。

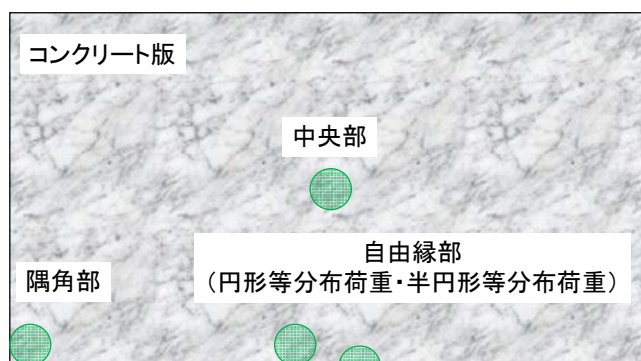


図-1.1 コンクリート版における荷重位置の平面図

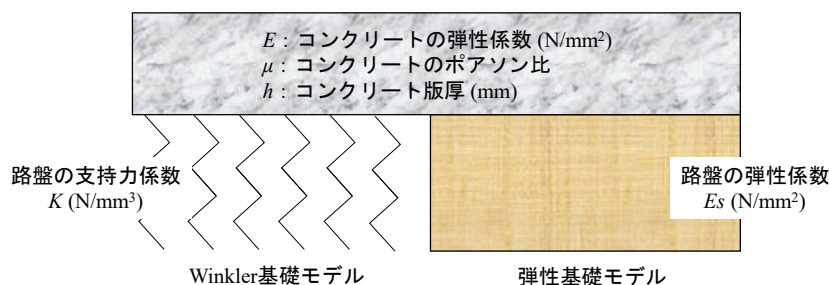


図-1.2 Winkler 基礎モデルと弾性基礎モデル

表-1.1 本資料で使用する用語

用語	解説
現プログラム	1977年に福手が構築した Westergaard 中央部載荷公式に基づく解析プログラム。
新プログラム	本資料に示す、現プログラムを VBA で再構築した解析プログラム。
荷重スキャン	図-2.2のように、原点を通る2本の直線（角度は θ_1 と θ_2 ）により解析対象の載荷重を扇形荷重に細分化し、全ての扇形荷重について、原点から載荷重の外縁までの扇形荷重の長さ p_+ 、内縁までの扇形荷重の長さ p_- 、スキャン角度 θ を整理する処理。
スキャン直線	荷重スキャンで使用する原点を通る直線。スキャン角度 θ の場合のスキャン直線は $y = x \cdot \tan\theta$ であるため、スキャン角度が θ のスキャン直線と $\theta + 180$ 度のスキャン直線は同一となる。
スキャン角度	荷重スキャンで扇形荷重の長さ p_+ 及び p_- を確認する際のスキャン直線の角度 θ 。原点を通る2本の直線（角度は θ_1 と θ_2 ）により細分化された扇形荷重の中央角度 $(\theta_2 + \theta_1)/2$ としている。
スキャン角度幅	原点を通る2本の直線（角度は θ_1 と θ_2 ）により細分化された扇形荷重の角度幅 $\theta_2 - \theta_1$ 。
基本位置	楕円形荷重の場合は長軸と短軸、矩形荷重の場合は4辺の方向が、 x 方向・ y 方向に正対するとして入力した載荷重の位置であり、脚荷重角度を考慮しない場合の載荷重の位置。楕円形荷重の場合、図-2.3のように載荷重の接地面積から楕円形寸法が決定されている場合は x 方向を短半径、 y 方向を長半径としている。
脚荷重角度	この解析手法で出力する応力は原点における x 方向応力のみであるから、任意の方向の応力や最大主応力を確認するために、出力したい応力方向を解析上の x 方向とする目的で、図-2.5のような基本位置の載荷重を、原点を中心として反時計回りに回転させる角度。
脚荷重シフト量	この解析手法は原点における舗装応答のみを算出可能であるから、任意の位置の舗装応答を確認するために、応答出力点の座標を解析上の原点とする目的で、図-2.5のような基本位置の載荷重を、 x 方向と y 方向に移動させるための移動量。
表の交点 裏の交点	図-3.4のように、スキャン角度が θ と $\theta + 180$ 度のスキャン直線は同一となるが、載荷重とスキャン直線の交点が存在する場合、スキャン角度 θ の象限に存在する交点を表の交点、スキャン角度 θ の象限に存在しない交点を裏の交点としている。

2. 現プログラムの概要と改良方針

2章では現プログラムの概要と改良方針を記す。

2.1 基礎原理

現プログラムの基礎原理である Pickett と Ray が作成した影響図⁷⁾の概念図を図-2.1 に示す。この影響図は原点に発生する鉛直方向のたわみ、原点に発生する x 方向の曲げモーメント（この曲げモーメントに $6/h^2$ を乗じることで x 方向応力となる）を算出する用途で示された図である。具体的な使用法は、コンクリート版厚、コンクリートの弾性係数とポアソン比、路盤の支持力係数から式-2.1により算出されるコンクリート舗装の剛比半径を算出し、影響図内に掲載されている剛比半径の長さを基準として載荷重の寸法と位置を影響図に描画し、載荷重内に含まれるブロック数を数え、このブロック数に係数を乗じることで原点のたわみと x 方向曲げモーメントを算出する。そのため、載荷重の個数や形状に依らずコンクリート舗装の応答値を算出可能な方法であることが特徴である。

$$l = \sqrt[4]{\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot K}} \quad \dots \dots \dots \text{式-2.1}$$

ここで、

- l : 剛比半径 (mm)
- E : コンクリートの弾性係数 (N/mm²)
- h : コンクリート版厚 (mm)
- μ : コンクリートのポアソン比
- K : 路盤の支持力係数 (N/mm³)

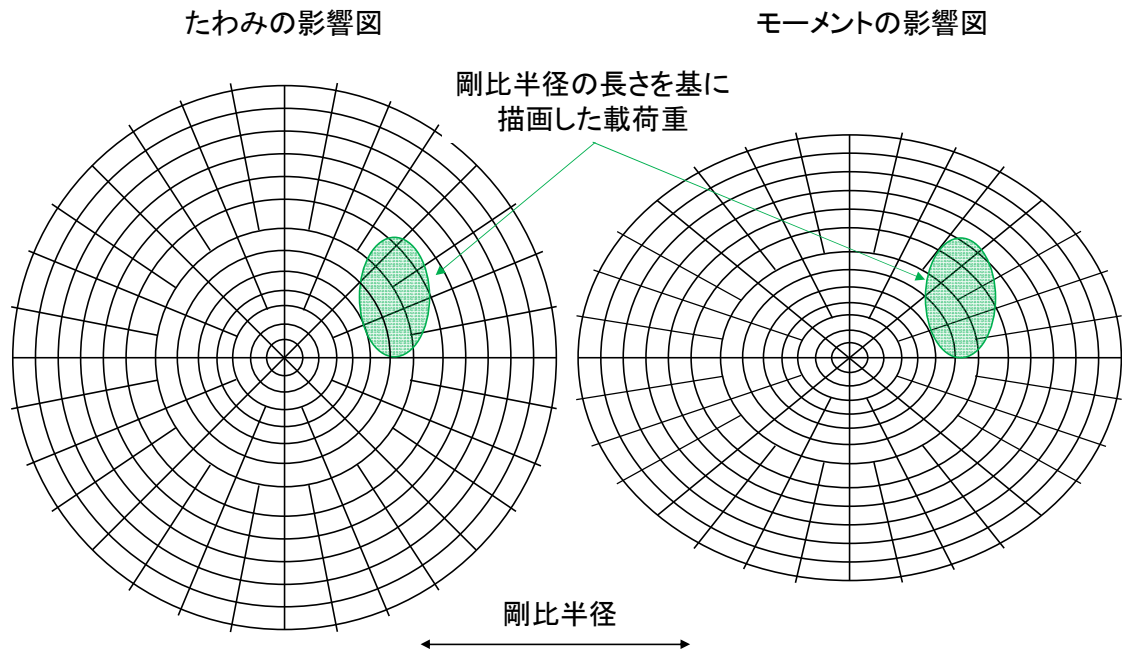


図-2.1 Pickett と Ray による影響図の概念図
(概念図であり、ブロック寸法と剛比半径の長さの比は正確ではない)

Pickett と Ray による影響図は、剛比半径、原点からブロックまでの距離、そのブロックが配置されている角度に応じてそれぞれのブロック面積が変化しており、一つ一つのブロックが全て同値のたわみ・曲げモーメントとなるように描画されている。以下に影響図の特徴を記す。

- ・ たわみ用影響図のブロックは、原点を中心として同心円状に配置されている。そのため、載荷重の中心の x 座標を $p \cdot \cos\theta$ 、 y 座標を $p \cdot \sin\theta$ とした場合、原点に発生するたわみは、原点から載荷重までの距離 p により決まり、載荷重が配置されている角度 θ は無関係である。
- ・ 曲げモーメント用影響図のブロックは、たわみ用影響図とは異なり、若干扁平した規則性の元に配置されている。そのため、原点に発生する x 方向曲げモーメントは原点から載荷重までの距離 p だけではなく、載荷重が配置されている角度 θ に依存する。
- ・ 図-2.1 の概念図では省略しているが、曲げモーメント用影響図は、原点付近には正のブロック (Positive Blocks) が、原点から遠く離れた位置には負のブロック (Negative Blocks) が配置されている。そのため、原点から遠く離れた位置の載荷重により原点に発生する x 方向曲げモーメントは負のモーメントになる。また、影響図の x 軸上における負のブロックは、 x が概ね剛比半径よりも遠い位置に配置されているため、 x が概ね剛比半径の位置に載荷重がある場合の原点における x 方向曲げモーメント、つまり、載荷重中心から概ね剛比半径だけ離れた位置における x 方向曲げモーメントは 0 となる⁹⁾。

この影響図は具体的には式-2.2～式-2.4 により作成されている。影響図のブロックの角度幅 $\theta_2 - \theta_1$ を一定とすれば、前述した「 x 方向曲げモーメントは載荷重が配置されている角度 θ に依存する」のは式-2.4 の $\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1$ の項によるものである。

中央部載荷における原点のたわみ

$$w(\theta_2, \theta_1, p) = \frac{q}{K} \cdot \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \left[1 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{l} \cdot \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{i} \cdot H_1^1 \left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l} \right) \right\} \right] \quad \dots \quad \text{式-2.2}$$

中央部載荷における原点の x 方向曲げモーメント

$$M(\theta_2, \theta_1, p) = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \operatorname{Re}[Z(\theta_2, \theta_1, p)] \quad \dots \quad \text{式-2.3}$$

$$Z(\theta_2, \theta_1, p) = (1 + \mu) \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{p}{l} \cdot \sqrt{i} \cdot H_1^1 \left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l} \right) + (1 - \mu) \cdot (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \cdot \left\{ \frac{\sqrt{i} \cdot p}{2 \cdot l} \cdot H_1^1 \left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l} \right) + H_0^1 \left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l} \right) - 0.5 \right\} \quad \dots \quad \text{式-2.4}$$

ここで、

w	: 原点のたわみ (mm)
q	: 載荷重の接地圧 (N/mm ²)
K	: 路盤の支持力係数 (N/mm ³)
θ_2	: 図-2.2 における扇形荷重の角度 (rad)
θ_1	: 図-2.2 における扇形荷重の角度 (rad)
π	: 円周率
p	: 図-2.2 における扇形荷重の長さ (mm)
l	: 剛比半径 (mm)

Im	: 虚数部分
i	: 虚数単位 ($i^2 = -1$)
H_1^1	: 第 1 種 1 次ハンケル関数
M	: 原点の x 方向曲げモーメント (N・mm/mm)
Re	: 実数部分
H_0^1	: 第 1 種 0 次ハンケル関数

式-2.2～式-2.4 は、図-2.2 のように原点を通る角度 θ_2 及び θ_1 の直線により細分化された長さ p の扇形荷重により、原点に発生する応答値（たわみと x 方向曲げモーメント）を算出する式である。そのため、原点を中心に 0 度から 360 度まで照査を行い、載荷重を細分化したそれぞれの扇形荷重による応答値を式-2.2～式-2.4 により算出し、最後に応答値を全て合算することで載荷重全体による応答値を算出することが可能となる。以降では、この載荷重の細分化処理を「荷重スキャン」、角度 θ を「スキャン角度」、原点を通る角度 θ の直線を「スキャン直線」、扇形荷重の角度幅 $\theta_2 - \theta_1$ を「スキャン角度幅」と称する。また、扇形荷重の長さ p はスキャン角度 θ が扇形荷重の中央角度 $(\theta_2 + \theta_1)/2$ であるときの長さとする。

なお、原点が載荷重外にある場合には、図-2.2 右のように、原点から見て載荷重の外縁までの長さを有する長い扇形荷重と、載荷重の内縁までの長さを有する短い扇形荷重それぞれによるコンクリート舗装の応答値を算出し、長い扇形荷重による応答値を加算し、短い扇形荷重による応答値を減算することにより処理する。本資料では、加算応答値に使用する扇形荷重の長さを p_+ 、減算応答値に使用する扇形荷重の長さを p_- として区別する。

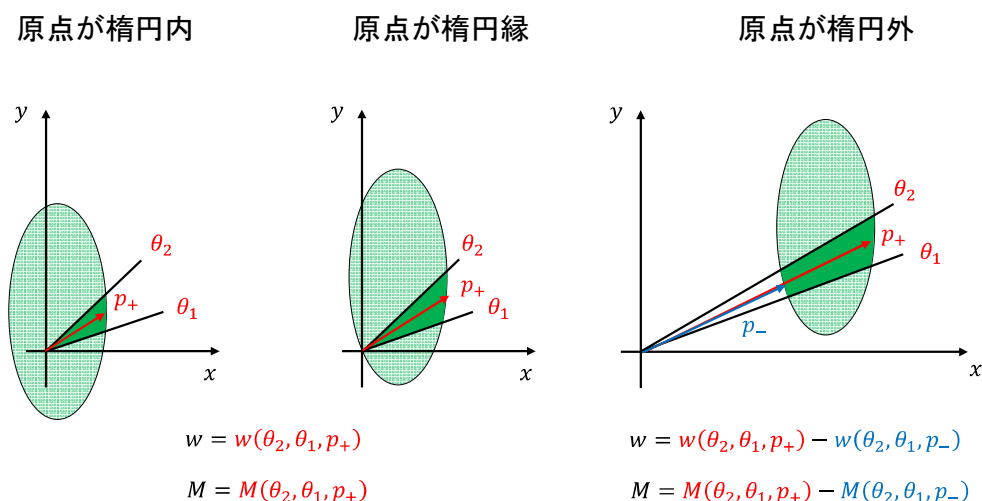


図-2.2 荷重スキャンのイメージ

2.2 現プログラムの概要

福手は 1977 年に式-2.2～式-2.4 を基にした現プログラムを構築した⁸⁾。現プログラムの特徴は以下のとおりである。

- ・ 同一の寸法・接地圧の載荷重を複数考慮することが可能である。載荷重に関する入力条件は、載荷重の中心座標（ x 座標と y 座標）、接地圧、接地面積、輪数と、後述する脚荷重角度、脚荷重シフト量であり、コンクリート舗装構造に関する入力条件は、コンクリート版厚、コンクリートの弾性係数とポアソン比、路盤の支持力係数である。
- ・ 載荷重は楕円形荷重のみを対象とし、楕円形の寸法は、入力した載荷重の接地面積から図-2.3 により算出される短半径 a ・長半径 b の楕円形荷重が自動で設定される。この寸法の定義は図-2.4 のように、Pickett と Ray が影響図の使用例で示している「載荷重の幅を載荷重の長さの 0.6 倍とした、1 つの長方形と 2 つの半円形から構成される載荷重」⁷⁾を、福手が「取り扱いを簡単にするために、それと同じ接地面積をもち、しかも長軸の長さを一致させた楕円」⁸⁾として定義した楕円形荷重である。なお、Boeing 社の WEB サイトに掲載されている「Calculating Tire Contact Area」⁹⁾では、航空機のタイヤの接地形状は「接地面積を A として、幅は $0.894 \cdot \sqrt{A}$ 、長さは幅の 1.6 倍の楕円形荷重」とされ

ている。これは楕円形荷重の長さを L とすれば幅が $0.625 \cdot L$ であり、ほぼ同等の寸法の楕円形荷重である。

- ・ 図-2.2 に示すとおり、スキャン角度が $(\theta_2 + \theta_1)/2$ の場合の扇形荷重の長さ p を読み取る。現プログラムでは、楕円形と原点の位置関係に応じて「原点が楕円内の場合」「原点が楕円縁の場合」「原点が楕円外の場合」の3パターンに分類して荷重スキャンを実施している。
- ・ コンクリート舗装応答値の出力点は常に原点であり、出力される応力は常に x 方向である。そのため、任意の位置・方向に発生する応答値を出力する場合は、図-2.5 に示すとおり脚荷重角度と脚荷重シフト量を設定することで、脚荷重位置を調整し解析を行う。例えば、脚荷重角度を90度として出力した x 方向応力は、脚荷重角度を0度とした場合（以降ではこれを「基本位置」と称する）の y 方向応力に相当する。
- ・ 路盤の支持力係数、コンクリート版厚、脚荷重角度の3つの条件については、最小値、最大値、ステップ量を入力することにより連続解析を行うことが可能である。この機能は例えば、1脚2輪・4輪・6輪のような複数の載荷重から構成される航空機脚荷重により発生する最大主応力を確認するため、脚荷重角度を0度から179度まで1度ステップで解析を行う目的等で使用される。

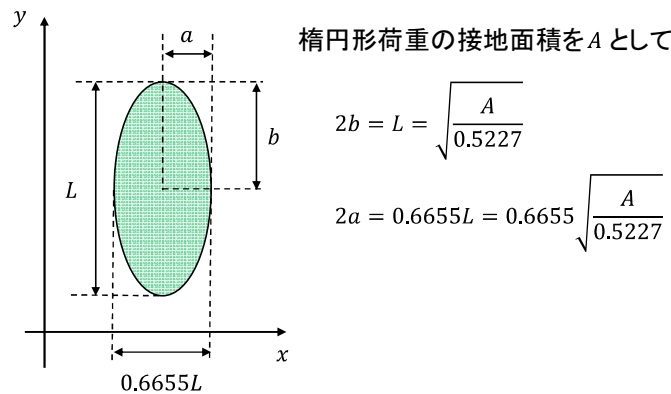


図-2.3 現プログラムで設定される楕円形荷重の寸法

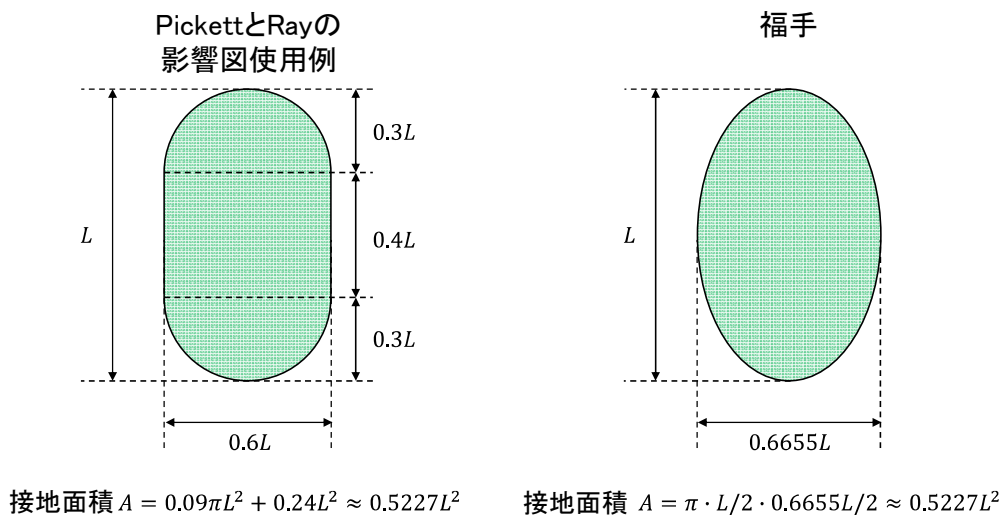


図-2.4 現プログラムで設定される楕円形荷重の寸法の根拠

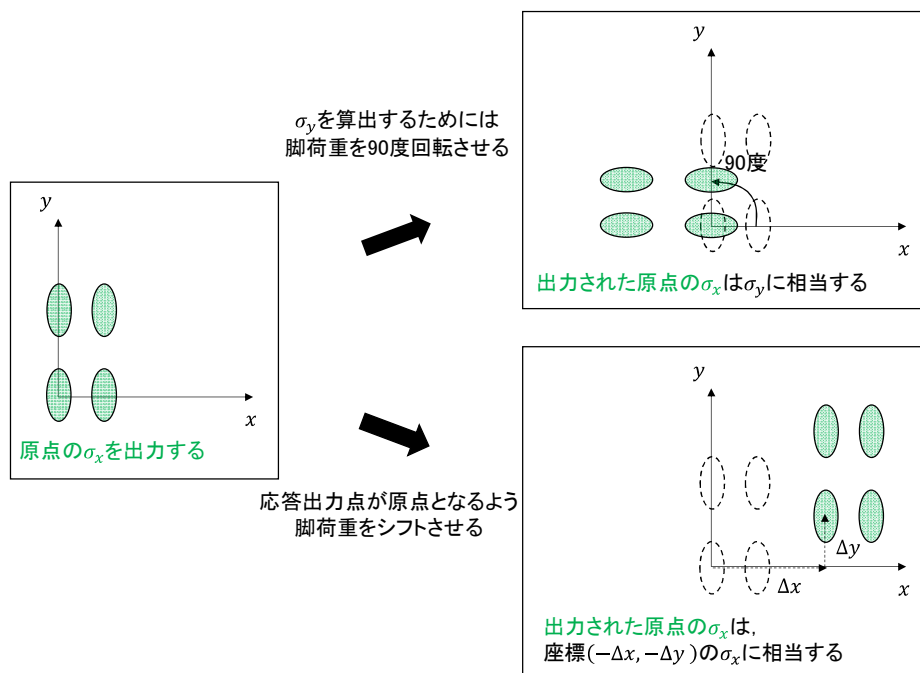


図-2.5 脚荷重角度と脚荷重シフト量

2.3 改良方針

前述のとおり現プログラムは、Westergaard による研究成果を基に Pickett と Ray が発展させた式-2.2～式-2.4 を基礎とした比較的簡便な解析方法であり、解析に要する時間は数秒である。また、有限要素解析のようにメッシュ寸法の影響を受けないこと、境界条件の設定が不要であることから、利便性が非常に高い。しかしながら、現プログラムを長年使用した著者は以下の課題があると考えている。

- ・ 楕円形荷重のみを対象としているため、一般的な舗装構造解析手法である多層弾性解析及び有限要素解析で用いられる円形荷重及び矩形荷重を設定することができない。そのため、他の解析手法との比較等が困難である。
- ・ 任意の方向・位置に発生する応答値を算出するための脚荷重角度と脚荷重シフト量の概念がプログラム使用者にはわかりにくく、解析条件を誤って入力する場合や、解析条件の入力が非常に煩雑となる場合がある。4章で詳細を述べるが、複数の載荷重によるx方向応力は、脚荷重角度が0度の基本位置の場合には最大主応力とならない場合が多く、最大主応力を確認するためには脚荷重角度を0度から179度まで変化させた連続解析が必要であるが、この連続解析が必要であることをプログラム使用者が失念している場合がある。また、載荷重中心から遠方までのたわみ・応力分布を解析したい場合は、脚荷重シフト量を変化させた連続解析ができないため、入力テキストファイルを毎回書き換えて解析を実行する必要がある。
- ・ 現プログラムを保守・改良をするためには、ソースコードの細部まで理解する必要があるが、福手は現プログラムの基礎原理を港研資料⁸⁾に記しているためソースコードの理解の参考とすることができる。ただし、この解析法の中核である荷重スキャン方法の詳細が記載されておらず、保守・改良が容易ではない。

以上の課題を解決するため、以下の方針により改良を行うこととした。

- ・ 接地面積から図-2.3のように自動設定される楕円形荷重のほか、円形荷重、矩形荷重、寸法自由入力の楕円荷重を考慮できるよう改良する。
- ・ プログラム利用者が脚荷重角度や脚荷重シフト量を意識することを不要とするため、応答値を出力したいx座標とy座標を指定するだけで、その位置のたわみ、x方向応力、y方向応力、最大主応力、最大主応力の方向を出力するよう改良する。
- ・ PC環境やコンパイラに依存せずに、Microsoft Excel がインストールされているPCで動作するように、VBAでプログラムを再構築する。また、新プログラムの保守や改良が容易となるよう、荷重スキャン方法を、できる限り条件分岐を不要とする簡便でわかりやすい方法に改良する。

3. 新プログラムの詳細

3章では新プログラムにおける処理方法の詳細を記す。

3.1 脚荷重角度を有する場合の荷重スキャン方法

任意の方向の応力を算出するためには脚荷重角度を設定し解析する必要がある。脚荷重角度を有する場合の荷重スキャン方法について、福手は詳細を港研資料⁸⁾に記載していないが、現プログラムのソースコードを確認したところ、**図-3.1 右**のように脚荷重を反時計回りに回転させた状態で荷重スキャンを行うのではなく、脚荷重は**図-3.1 左**の基本位置のまま、座標軸を時計回りに回転させた上で荷重スキャンを実施していた。これは、脚荷重自体を回転させた場合の処理が煩雑となることから、処理が容易になるよう工夫したものと考えられる。なお、**図-3.1 右**の場合に算出される x 方向応力は、**図-3.1 左**の基本位置で考えれば、正の x 軸から時計回りに θ_a だけ回転した方向の応力である。

しかしながら、**図-3.1 左**に示す、基本位置の載荷重に対してスキャン角度 θ のスキャン直線により細分化した扇形荷重の長さ p と、**図-3.1 右**に示す、基本位置から脚荷重を θ_a だけ反時計回りに回転させた載荷重に対してスキャン角度 $\theta' = \theta + \theta_a$ のスキャン直線により細分化した扇形荷重の長さ p は同一となり、これは載荷重の形状に関わらず常に成立する。

そのため新プログラムでは、脚荷重角度に応じて荷重スキャンを実施（例えば、脚荷重角度を0度から179度まで1度ステップで連続解析する場合は荷重スキャンを180回実施）するのではなく、荷重スキャンは脚荷重角度がない基本位置において一回だけ実施するのみとし、荷重スキャンの結果から**式-2.2～式-2.4**で扇形荷重による応答を解析する際に、基本位置における荷重スキャンで得られた多数の p と θ の組み合わせを、脚荷重角度を有する場合の解析では p と θ' の組み合わせとして用いることとした。この方法を用いることで解析を高速化することが可能となる。

なお、新プログラムでは、使用者が脚荷重角度を考慮することは不要とし、自動で0度から179度まで1度ステップで連続解析を行い、指定された出力点の x 方向応力、 y 方向応力、最大主応力と最大主応力の方向を出力するとともに、使用者が特定の角度を指定することで、その特定の方向の応力も出力することができるようにした。

以降の荷重スキャン方法に関する解説では、脚荷重角度が0度の基本位置を対象とした場合のみを記述することとする。

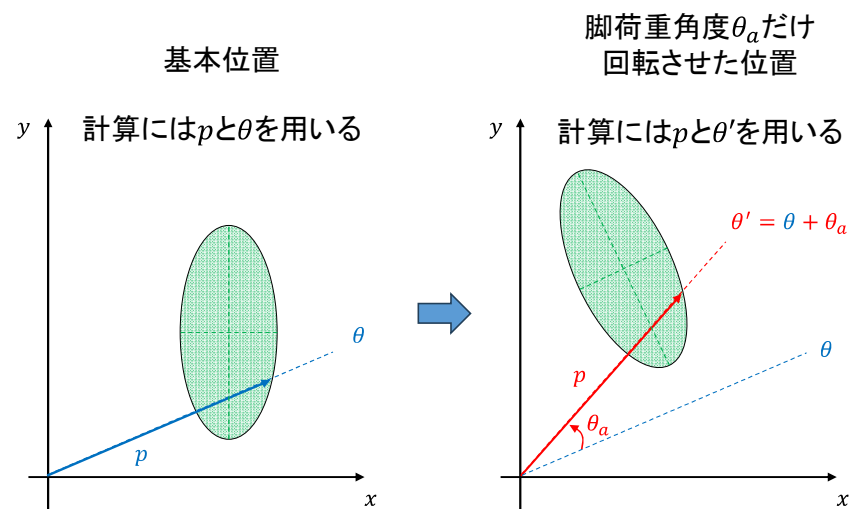


図-3.1 基本位置での荷重スキャンと脚荷重角度を有する場合の荷重スキャン

3.2 矩形荷重に対する荷重スキャン方法

改良方針に示したとおり、現プログラムでは楕円形荷重のみを対象としていたが、新プログラムでは円形荷重、楕円形荷重、矩形荷重を対象とすることとした。円形荷重は楕円形荷重の一種であること、円形荷重及び楕円形荷重の荷重スキャン方法は、現プログラムと同様に「原点が楕円内」「原点が楕円縁」「原点が楕円外」の3パターンに条件分岐させる方法とすればよいため対応は容易である。しかしながら矩形荷重を対象とした荷重スキャン方法は、かなり煩雑な処理が必要と想定されたことから、効率的な荷重スキャン方法を検討することとした。

原点、 x 軸、 y 軸と矩形荷重の相対位置関係を細かく分類した結果を図-3.2 に示すが、合計 25 パターンに分類される。このうちのいくつかは対称性などを考慮することで処理方法を統合できる可能性があるが、それぞれのパターンにおいて、図-3.3 に示したようなスキャン角度 θ に応じた数種類の条件分岐が必要となる。これは、円形や楕円形は一つの方程式で定義可能であるため、図-3.1 左のようなスキャン角度 θ を有するスキャン直線と円形・楕円形との交点座標を算出することが容易であるが、矩形荷重を対象とした場合、矩形荷重を構成する 4 本の直線が荷重スキャンの対象となることから、図-3.3 のように一つのパターンを対象として荷重スキャンを行う場合でも、スキャン角度 θ に応じた条件分岐が必要となるためである。これらのパターンに応じた処理方法を全て網羅し記述することでプログラムを再構築する方法もあるが、保守・改良を意識すれば、簡便でわかりやすい荷重スキャン方法が望ましいことから、簡便な荷重スキャン方法を検討することとした。

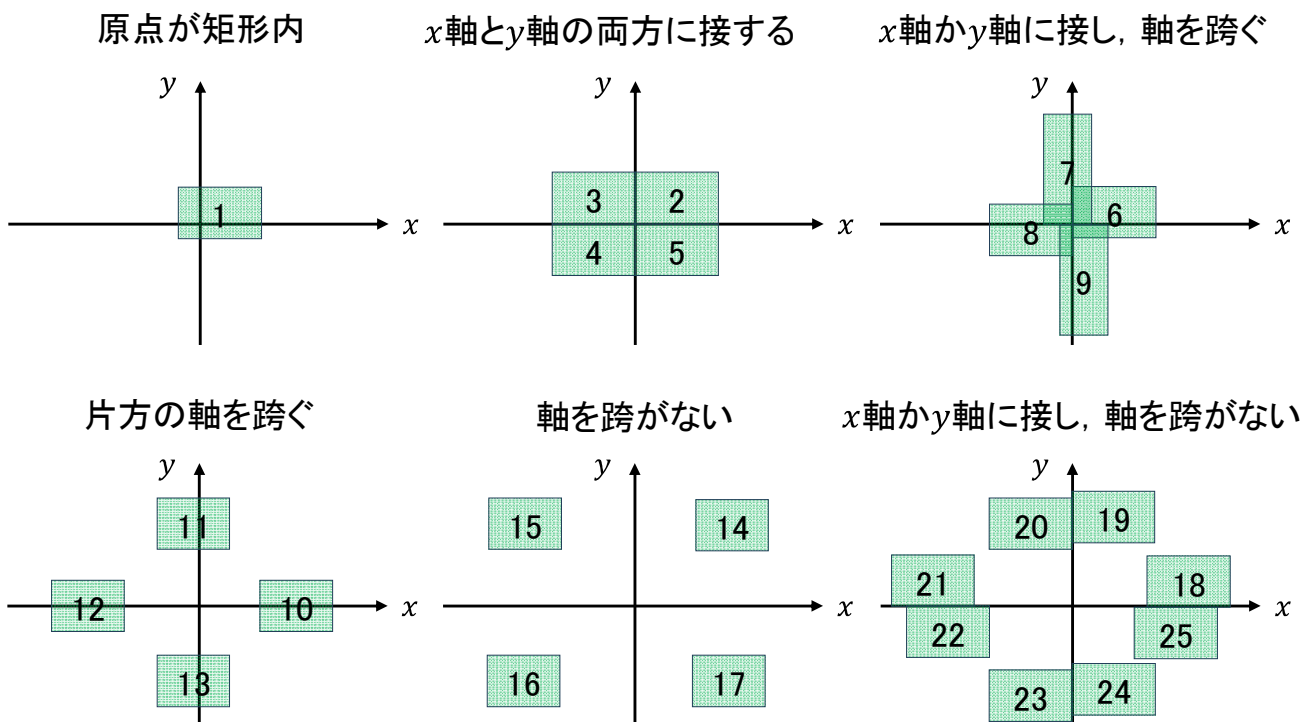


図-3.2 矩形荷重を対象とした荷重スキャンのパターン分類

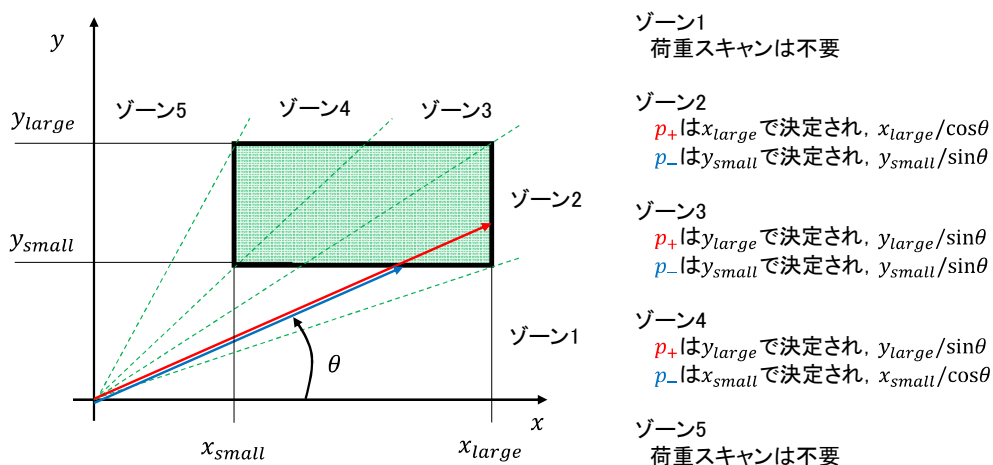


図-3.3 矩形荷重を対象とした荷重スキャンの一例 (図-3.2 のパターン 14)

$$p = \frac{x_{large}}{\cos\theta} \quad \dots \dots \dots \text{式-3.1}$$

$$p = \frac{x_{small}}{\cos\theta} \quad \dots \dots \dots \text{式-3.2}$$

$$p = \frac{y_{large}}{\sin\theta} \quad \dots \dots \dots \text{式-3.3}$$

$$p = \frac{y_{small}}{\sin\theta} \quad \dots \dots \dots \text{式-3.4}$$

ここで、

- p : 扇形荷重の長さ (mm)
- θ : スキャン角度 (rad)
- x_{large} : 矩形荷重の x 方向端 (最大) の座標 (mm)
- x_{small} : 矩形荷重の x 方向端 (最小) の座標 (mm)
- y_{large} : 矩形荷重の y 方向端 (最大) の座標 (mm)
- y_{small} : 矩形荷重の y 方向端 (最小) の座標 (mm)

まず、図-3.2 で示したパターン 14 について、式-3.1～式-3.4 に示す、矩形を構成する 4 本の直線とスキャン角度 θ を有するスキャン直線により機械的に算出される 4 つの扇形荷重の長さ p について整理した結果を図-3.4 に示す。これを見ると、スキャン角度 θ が第一象限の場合には、4 つの p の符号は全て正である。また、この 4 つの p を短い方から長い方 (p の長短は正の最大値を最長、負の最大値を最短としている) に並べると、最短の p と最長の p は交点が矩形荷重外のため不採用となり、短い方から二番目の p が p_- に、短い方から三番目の p が p_+ に採用される。

図-3.3 で示したように、スキャン角度 θ が第一象限であっても、その大きさに応じて p の算出に使用する分母と分子の組み合わせは図-3.4 に示した組み合わせから変化するが、 p の符号と長短順の傾向は変化しないことを確認している。スキャン角度 θ が第二象限、第三象限、第四象限の場合も同様に整理すると表-3.1 に示すとおりとなる。

なお、スキャン角度が θ の場合と $\theta+180$ 度の場合のスキャン直線は同一の直線である。例えば図-3.4 のように、スキャン角度が第一象限である θ_{1q} の場合は、矩形荷重とスキャン直線の交点が第一象限に存在するため p は全て正となり、スキャン角度が第三象限である θ_{3q} の場合は、矩形荷重とスキャン直線の交点が第三象限には存在しないため p は全て負となる。以降では便宜的に、スキャン角度の象限に存在する交点を「表の交点」、スキャン角度の象限に存在しない交点を「裏の交点」と呼称する。

同様に、図-3.2 で示したパターン 11 について整理した結果が図-3.5 と表-3.2 である。スキャン角度 θ が矩形荷重が存在する第一象限と第二象限の場合には、3 つの p が正、1 つの p が負である。前述のとおり、この負の p は裏の交点によるものである。また、パターン 14 と同様に、短い方から二番目の p が p_- に、短い方から三番目の p が p_+ に採用されることがわかる。

パターン 14 及び 11 の整理結果から、矩形荷重を構成する 4 本の直線とスキャン角度 θ を有するスキャン直線により機械的に算出される 4 つの扇形荷重の長さ p については、その符号と長短の順序に何らかの規則性があると考え、図-3.2 の 25 パターン全てについて同様の整理を行い、その結果を表-3.3 にまとめた。これを見ると以下の規則性があると言える。

- ・ 矩形荷重内に原点があるパターン 1～9 の場合、スキャン角度の象限と矩形荷重の象限が一致する場合は正の p が 2 つ存在し、 p_+ の採用候補となるのは短い方から三番目の p である。
- ・ 矩形荷重外に原点があるパターン 10～25 の場合、スキャン角度の象限と矩形荷重の象限が一致する場合は正の p が 3 つ以上存在し、 p_- の採用候補となるのは短い方から二番目の p 、 p_+ の採用候補となるのは短い方から三番目の p である。

この規則性を用いることで、矩形荷重を構成する 4 本の直線とスキャン角度 θ から機械的に算出される 4 つの p の長短の順序と正負の数により

- ・ 矩形荷重内に原点がある場合で、正の p が 2 つ存在する場合は、短い方から三番目の p を p_+ の採用候補とする。
- ・ 矩形荷重外に原点がある場合で、正の p が 3 つ以上存在する場合は、短い方から二番目の p を p_- の、三番目の p を p_+ の採用候補とする。
- ・ 採用候補の p のうち、交点の x 座標が x_{small} 以上 x_{large} 以下、 y 座標が y_{small} 以上 y_{large} 以下の p を採用する。この条件を満たさないのは、スキャン角度が図-3.3 のゾーン 1 またはゾーン 5 である場合（矩形荷重とスキャン直線の交点が存在しない場合）に相当する。

という簡便な判定方法で採用すべき扇形荷重の長さ p_+ 及び p_- の特定を容易に行うことが可能となるため、矩形荷重に対する荷重スキャン方法には、この方法を採用することとした。

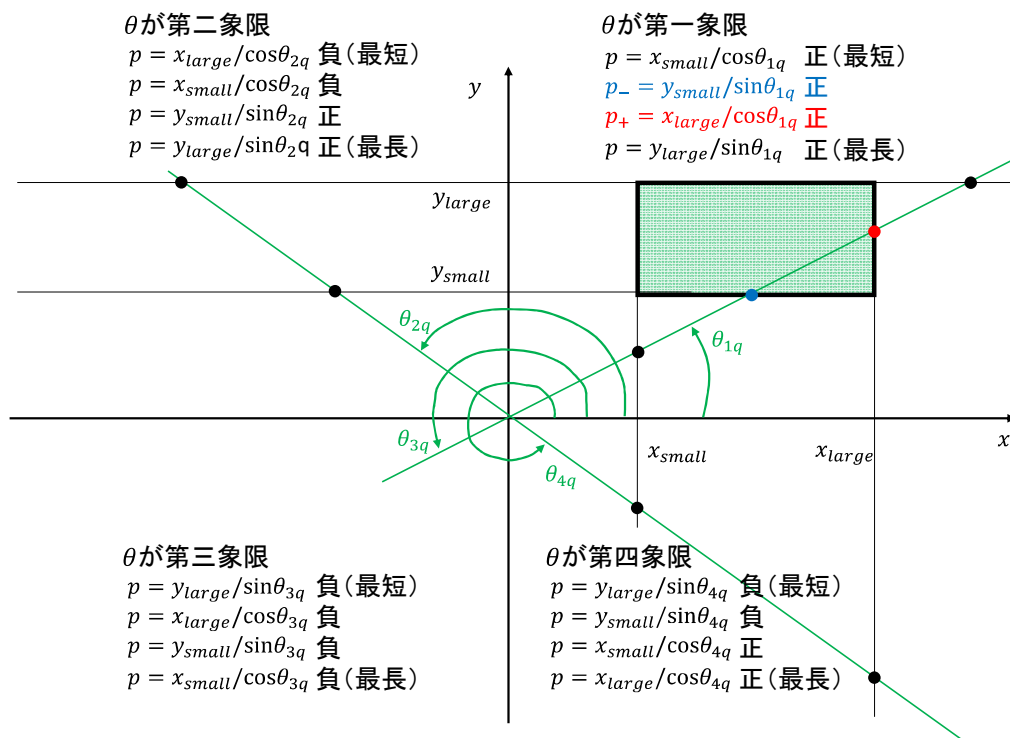


図-3.4 パターン 14 の p の整理

(赤が加算応答値用の p_+ 、青が減算応答値用の p_- に関する交点、黒が採用しない交点)

表-3.1 パターン 14 の p の整理

スキャン角度 θ	長短順の p (左側が短い) と符合				正の p の数
第一象限	正	正 (p_-)	正 (p_+)	正	4
第二象限	負	負	正	正	2
第三象限	負	負	負	負	0
第四象限	負	負	正	正	2

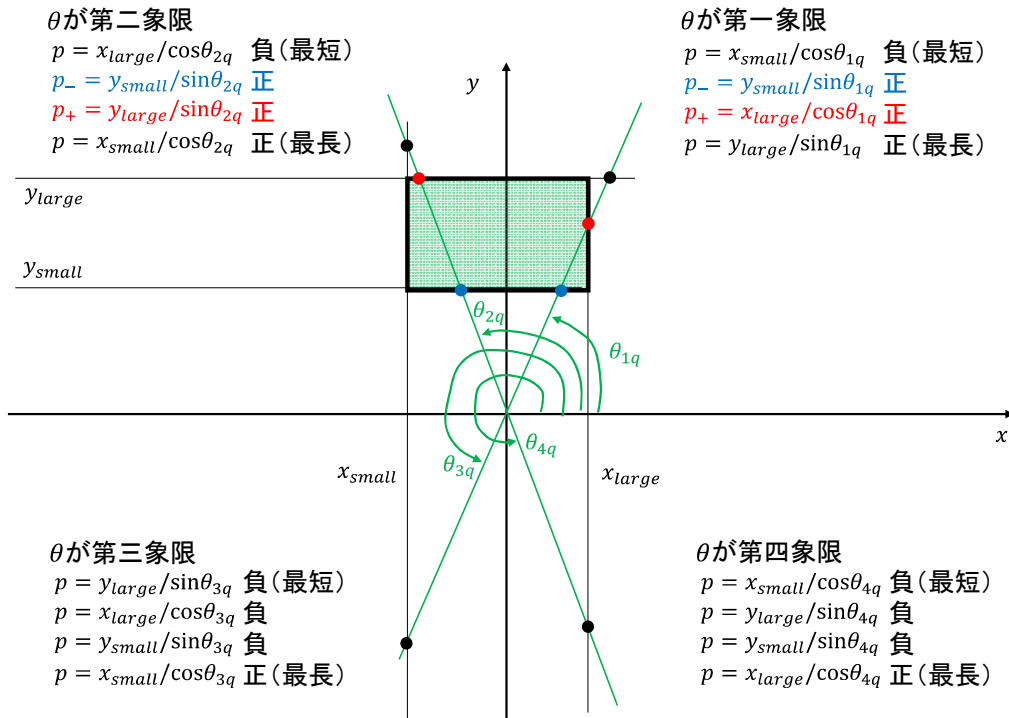


図-3.5 パターン 11 の p の整理

(赤が加算応答値用の p_+ ，青が減算応答値用の p_- に関する交点，黒が採用しない交点)

表-3.2 パターン 11 の p の整理

スキャン角度 θ	長短順の p (左側が短い) と符合				正の p の数
第一象限	負	正 (p_-)	正 (p_+)	正	3
第二象限	負	正 (p_-)	正 (p_+)	正	3
第三象限	負	負	負	正	1
第四象限	負	負	負	正	1

表-3.3 パターン 1～25 の p の整理

パターン 番号	原点	スキャン角度象限 と矩形荷重象限	長短順の p （左側が短い）と符合				正の p の数
1	矩形内	一致	負	負	正 (p_+)	正	2
2～5		一致	0	0	正 (p_+)	正	2
		不一致	負	0/負	0	正/0	1/0
6～9		一致	負	0	正 (p_+)	正	2
		不一致	負	負	0	正	1
10～13	矩形外	一致	負	正 (p_-)	正 (p_+)	正	3
		不一致	負	負	負	正	1
14～17		一致	正	正 (p_-)	正 (p_+)	正	4
		不一致	負	負	正/負	正/負	2/0
18～25		一致	0	正 (p_-)	正 (p_+)	正	3
		不一致	負	0/負/負	正/0/負	正/正/0	2/1/0

3.3 円形荷重及び楕円形荷重に対する荷重スキャン方法

円形荷重及び楕円形荷重の荷重スキャン方法は、矩形荷重の場合ほど複雑ではない。これは、円形荷重や楕円形荷重を式-3.5 の 1 つの方程式で表すことが可能なためである。円形荷重は楕円形荷重の一種に過ぎないため、以降は楕円荷重について記す。

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \text{式-3.5}$$

ここで、

- x : 楕円縁の x 座標
- y : 楕円縁の y 座標
- x_0 : 楕円中心の x 座標
- y_0 : 楕円中心の y 座標
- a : 楕円の短半径 (x 方向)
- b : 楕円の長半径 (y 方向)

スキャン角度 θ を有するスキャン直線と、式-3.5 の楕円形との交点の座標を $x = p \cdot \cos\theta$, $y = p \cdot \sin\theta$ として整理すると式-3.6 のとおりとなる。

$$\frac{(p \cdot \cos\theta - x_0)^2}{a^2} + \frac{(p \cdot \sin\theta - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 \cdot (p^2 \cdot \cos^2\theta - 2 \cdot p \cdot x_0 \cdot \cos\theta + x_0^2) + a^2 \cdot (p^2 \cdot \sin^2\theta - 2 \cdot p \cdot y_0 \cdot \sin\theta + y_0^2) = a^2 \cdot b^2$$

$$p^2 \cdot (b^2 \cdot \cos^2\theta + a^2 \cdot \sin^2\theta) - 2 \cdot p \cdot (x_0 \cdot b^2 \cdot \cos\theta + y_0 \cdot a^2 \cdot \sin\theta) + b^2 \cdot x_0^2 + a^2 \cdot y_0^2 - a^2 \cdot b^2 = 0 \quad \text{式-3.6}$$

ここで、

$$\beta_1 = b^2 \cdot \cos^2\theta + a^2 \cdot \sin^2\theta \quad \dots \quad \text{式-3.7}$$

$$\beta_2 = x_0 \cdot b^2 \cdot \cos\theta + y_0 \cdot a^2 \cdot \sin\theta \quad \dots \quad \text{式-3.8}$$

$$\beta_3 = b^2 \cdot x_0^2 + a^2 \cdot y_0^2 - a^2 \cdot b^2 \quad \dots \quad \text{式-3.9}$$

とすると式-3.6 は以下のとおりとなる。

$$\beta_1 \cdot p^2 - 2 \cdot \beta_2 \cdot p + \beta_3 = 0 \quad \dots \quad \text{式-3.10}$$

よって、原点から交点までの長さ p は以下のとおりとなる。

$$p = \frac{\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3}}{\beta_1} \quad \dots \quad \text{式-3.11}$$

円形荷重及び楕円形荷重についても、3.2 で示した方法による荷重スキャンが可能であることを確認するため、細分化した扇形荷重の長さ p や $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ に着目して「原点が楕円内」「原点が楕円縁」「原点が楕円外」の3 ケースについて整理すると、図-3.6 及び以下のとおりとなる。

- $\beta_1 = b^2 \cdot \cos^2 \theta + a^2 \cdot \sin^2 \theta$ は二乗の項の和であること、 θ により両方の項が 0 となることはないため、0 あるいは負とはならず、常に正である。
- $\beta_3 = b^2 \cdot x_0^2 + a^2 \cdot y_0^2 - a^2 \cdot b^2$ はスキャン角度 θ によらない数値であり、原点が楕円内の場合は負、原点が楕円縁の場合は 0、原点が楕円外の場合は正である。
- 原点が楕円内の場合、式-3.11 の平方根の中の $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3$ は、 β_1 と β_3 の積が負であるから常に正となるため、スキャン角度が θ の場合の扇形荷重の長さ p は2 つ存在し、一つは正、一つは負である。図-3.6 に示すとおり、正の p は表の交点によるものであり、スキャン角度が θ の場合の p_+ として採用する。一方、負の p は裏の交点によるものであり、スキャン角度が θ の場合ではなく、 $\theta+180$ 度の場合に正となり p_+ として採用される長さである。
- 原点が楕円縁の場合、式-3.11 の平方根の中は β_2^2 となるため、スキャン角度が θ の場合の扇形荷重の長さ p は2 つ存在し、一つはスキャン直線と楕円との交点が原点であることによる $p = 0$ であるため採用しない。もう一つは $p = 2 \cdot \beta_2 / \beta_1$ であり、 β_2 の符号により正、0、負のいずれかである。まず β_2 が正の場合は正の p が得られる。この時の p は表の交点によるものであり、スキャン角度が θ の場合の p_+ として採用する。次に β_2 が 0 の場合は p が 0 であり、この時のスキャン直線は原点で楕円に接する直線であり採用しない。最後に β_2 が負の場合は負の p が得られる。この時の p は裏の交点によるものであり採用しない。
- 原点が楕円外の場合、スキャン直線と楕円が交差しない場合は式-3.11 の平方根の中は負、得られる 2 つの p は複素数となるため採用しない。スキャン直線が楕円の接線となる場合は式-3.11 の平方根の中は 0、得られる 1 つの $p = \beta_2 / \beta_1$ は β_2 の符号により正または負となるが、考慮すべき荷重の面積が 0 である（加算応答値に使用する扇形荷重の長さ p_+ と減算応答値に使用する扇形荷重の長さ p_- が同一である）ため採用しない。スキャン直線と楕円との交点が2 つ存在する場合は式-3.11 の平方根の中が正であり、得られる扇形荷重の長さ p は2 つとも正、あるいは、2 つとも負となる。図-3.6 に示すとおり、 p が2 つとも正である場合は表の交点によるものであるから、短い方を p_- に、長い方を p_+ に採用する。 p が2 つとも負である場合は裏の交点によるものであるから採用しない。

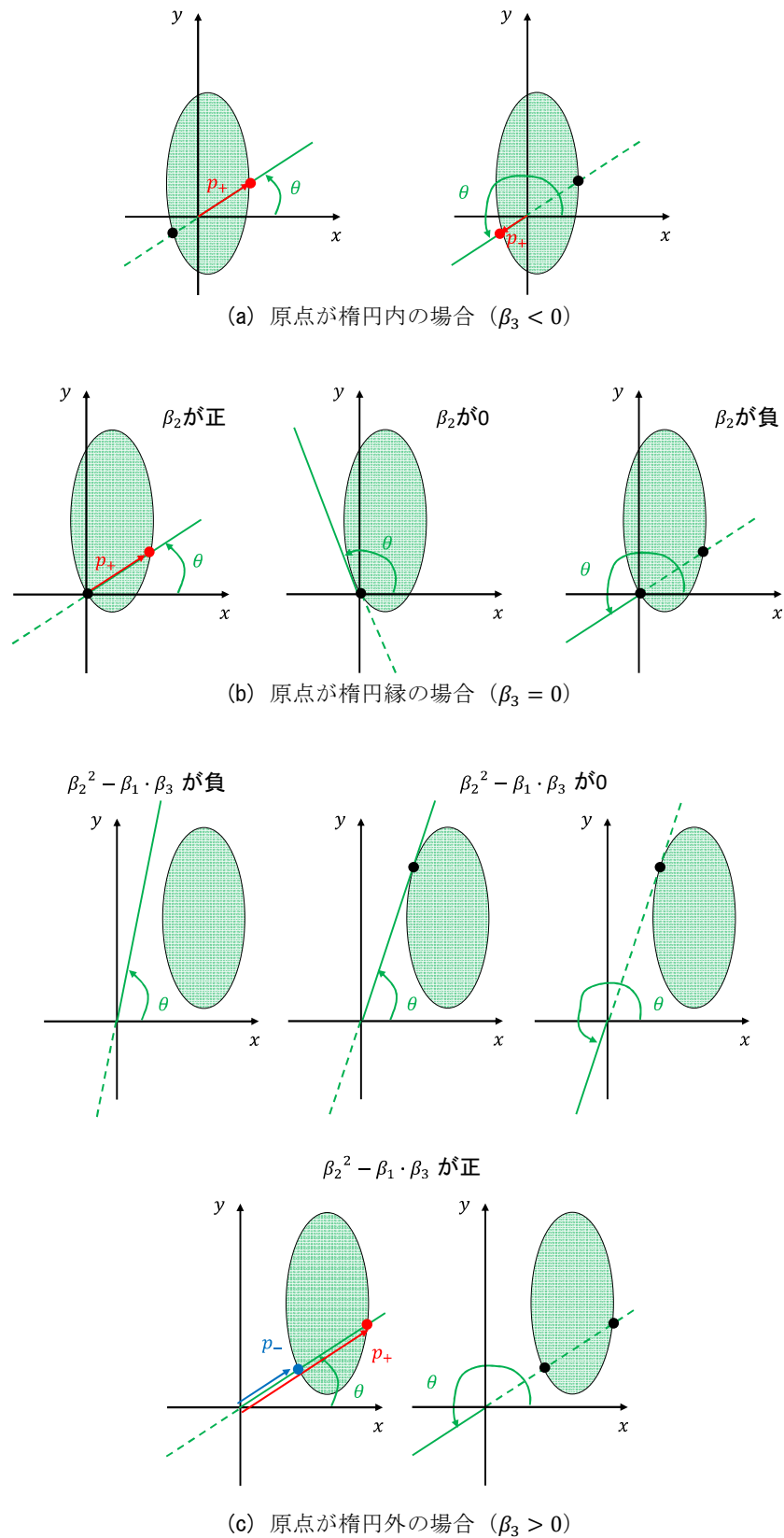


図-3.6 円形荷重・楕円形荷重に対する荷重スキャン

(赤が加算応答値用の p_+ 、青が減算応答値用の p_- に関する交点、黒が採用しない交点)

表-3.4 円形荷重・楕円形荷重に対する p の整理

原点	スキャン直線と楕円との交点	長短順の p （左側が短い）と符合		正の p の数
楕円内 $\beta_3 < 0$	表の交点が1つ、裏の交点が1つ $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 > 0$	負	正 (p_+)	1
楕円縁 $\beta_3 = 0$	原点、表の交点が1つ $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 > 0$, $\beta_2 > 0$	0	正 (p_+)	1
	原点（楕円の接線） $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 = 0$, $\beta_2 = 0$	—	0	0
	原点、裏の交点が1つ $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 > 0$, $\beta_2 < 0$	負	0	0
楕円外 $\beta_3 > 0$	交点がない $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 < 0$	複素数	複素数	0
	表の交点が1つ（楕円の接線） $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 = 0$, $\beta_2 > 0$	—	正	1
	裏の交点が1つ（楕円の接線） $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 = 0$, $\beta_2 < 0$	—	負	0
	表の交点が2つ $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 > 0$	正 (p_-)	正 (p_+)	2
	裏の交点が2つ $\beta_2^2 - \beta_1 \cdot \beta_3 > 0$	負	負	0

以上の結果をまとめると表-3.4 のとおりとなり、矩形荷重と類似した以下の規則性があると言える。

- ・ 原点が楕円内あるいは楕円縁にある場合で、正の p が1つ存在する場合に、これを p_+ として採用する。
- ・ 原点が楕円外にある場合で、正の p が2つ存在する場合に、短い方を p_- 、長い方を p_+ として採用する。

この規則性を用いることで、式-3.11 から機械的に算出される1つあるいは2つの p の長短の順序と正負の数により、採用すべき扇形荷重の長さ p_+ 及び p_- の特定を容易に行うことが可能となるため、円形荷重及び楕円形荷重に対する荷重スキャン方法についても、矩形荷重と同様の方法を採用することとした。

3.4 ハンケル関数の処理方法

荷重スキャンにより細分化した扇形荷重の p と θ の組み合わせが整理された後は、式-2.2～式-2.4 により、それぞれの扇形荷重が原点に発生させるたわみと x 方向応力を算出し、最後に合算すればよい。式-2.2～式-2.4 にはハンケル関数が含まれていること、解析値の実数部分や虚数部分のみを採用する式となっていることから、式-2.2～式-2.4 を変形する。

ここで、頻出する $p/(\sqrt{2} \cdot l)$ を α とすると、ハンケル関数及びハンケル関数の引数は式-3.13～式-3.15 と表すことができるため、これにより式-2.2～式-2.4 を以下のように変形する。

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{2} \cdot l} \quad \dots \dots \text{式-3.12}$$

$$\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \right) \cdot \frac{p}{l} = (1+i) \cdot \frac{p}{\sqrt{2} \cdot l} = \alpha \cdot (1+i) \quad \dots \dots \text{式-3.13}$$

$$H_1^1 \left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l} \right) = H_1^1 (\alpha \cdot (1+i)) = A_1(\alpha) + B_1(\alpha) \cdot i \quad \dots \dots \text{式-3.14}$$

$$H_0^1\left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l}\right) = H_0^1(\alpha \cdot (1+i)) = A_0(\alpha) + B_0(\alpha) \cdot i \quad \cdot \cdot \cdot \quad \text{式-3.15}$$

※ハンケル関数の実数部分・虚数部分については、便宜上、例えば $A_1(\alpha \cdot (1+i))$ を $A_1(\alpha)$ と表記している。

中央部載荷における原点のたわみ

$$w(\theta_2, \theta_1, p) = \frac{q}{K} \cdot \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2 \cdot \pi}\right) \cdot \left[1 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{l} \cdot \text{Im} \left\{ \sqrt{i} \cdot H_1^1\left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l}\right) \right\} \right] \quad \cdot \cdot \cdot \quad \text{式-2.2 再掲}$$

$$w(\theta_2, \theta_1, p) = \frac{q}{K} \cdot \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2 \cdot \pi}\right) \cdot \left[1 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{l} \cdot \text{Im} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i\right) \cdot (A_1(\alpha) + B_1(\alpha) \cdot i) \right\} \right]$$

$$w(\theta_2, \theta_1, p) = \frac{q}{K} \cdot \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2 \cdot \pi}\right) \cdot \left[1 + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (A_1(\alpha) + B_1(\alpha)) \right]$$

$$w(\theta_2, \theta_1, p) = \frac{q}{K} \cdot \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2 \cdot \pi}\right) \cdot \left[1 + \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \cdot (A_1(\alpha) + B_1(\alpha)) \right] \quad \cdot \cdot \cdot \quad \text{式-3.16}$$

中央部載荷における原点のx方向曲げモーメント

$$\begin{aligned} Z(\theta_2, \theta_1, p) &= (1 + \mu) \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{p}{l} \cdot \sqrt{i} \cdot H_1^1\left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l}\right) \\ &\quad + (1 - \mu) \cdot (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \cdot \left\{ \frac{\sqrt{i} \cdot p}{2 \cdot l} \cdot H_1^1\left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l}\right) + H_0^1\left(\frac{\sqrt{i} \cdot p}{l}\right) - 0.5 \right\} \quad \cdot \cdot \cdot \quad \text{式-2.4 再掲} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(\theta_2, \theta_1, p) &= (1 + \mu) \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{p}{l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i\right) \cdot (A_1(\alpha) + B_1(\alpha) \cdot i) \\ &\quad + (1 - \mu) \cdot (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \cdot \left\{ \frac{p}{2 \cdot l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i\right) \cdot (A_1(\alpha) + B_1(\alpha) \cdot i) \right\} \\ &\quad + (1 - \mu) \cdot (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \cdot (A_0(\alpha) + B_0(\alpha) \cdot i - 0.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re}[Z(\theta_2, \theta_1, p)] &= (1 + \mu) \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot \alpha \cdot (A_1(\alpha) - B_1(\alpha)) \\ &\quad + (1 - \mu) \cdot (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \cdot \left\{ \frac{\alpha}{2} \cdot (A_1(\alpha) - B_1(\alpha)) + A_0(\alpha) - 0.5 \right\} \end{aligned}$$

$$M(\theta_2, \theta_1, p) = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \text{Re}[Z(\theta_2, \theta_1, p)] \quad \cdot \cdot \cdot \quad \text{式-2.3 再掲}$$

$$M(\theta_2, \theta_1, p) = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \left[(1 + \mu) \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot \alpha \cdot (A_1(\alpha) - B_1(\alpha)) \right]$$

$$+ \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \left[(1 - \mu) \cdot (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \cdot \left\{ \frac{\alpha}{2} \cdot (A_1(\alpha) - B_1(\alpha)) + A_0(\alpha) - 0.5 \right\} \right] \quad \cdots \quad \text{式-3.17}$$

変形したたわみの算出式である式-3.16では第1種1次ハンケル関数の実数部分 $A_1(\alpha)$ と虚数部分 $B_1(\alpha)$ が必要であり、変形した曲げモーメントの算出式である式-3.17では $A_1(\alpha)$ と $B_1(\alpha)$ に加えて、第1種0次ハンケル関数の実数部分 $A_0(\alpha)$ が必要となる。また、この時のハンケル関数の引数は全て $\alpha \cdot (1 + i)$ の複素数となる。

現プログラムでは、プログラム内に記述されたベッセル関数に関する6つのサブルーチンを用いてハンケル関数进行处理していた（ただしソースコードでは、サブルーチンの作成時期が1989年と記載されていたため、福手による当初のプログラムから修正されたものと推測される）。しかしながら、著者はハンケル関数そのものを十分に理解できておらず、このサブルーチンを解読することができなかったため、別の処理方法を検討することとした。

VBAではMicrosoft Excelの各種関数を使用することができる。ハンケル関数を用意されていないものの、ベッセル関数が使用可能である。第1種 v 次ハンケル関数 $H_v^1(x)$ は、第1種 v 次ベッセル関数 $J_v(x)$ と第2種 v 次ベッセル関数 $Y_v(x)$ の線形結合 $H_v^1(x) = J_v(x) + i \cdot Y_v(x)$ であるため、ベッセル関数を用いることでハンケル関数を算出することが可能であるが、Microsoft Excelのベッセル関数は引数が実数の場合のみに対応しており、引数が複素数の場合には対応していない。

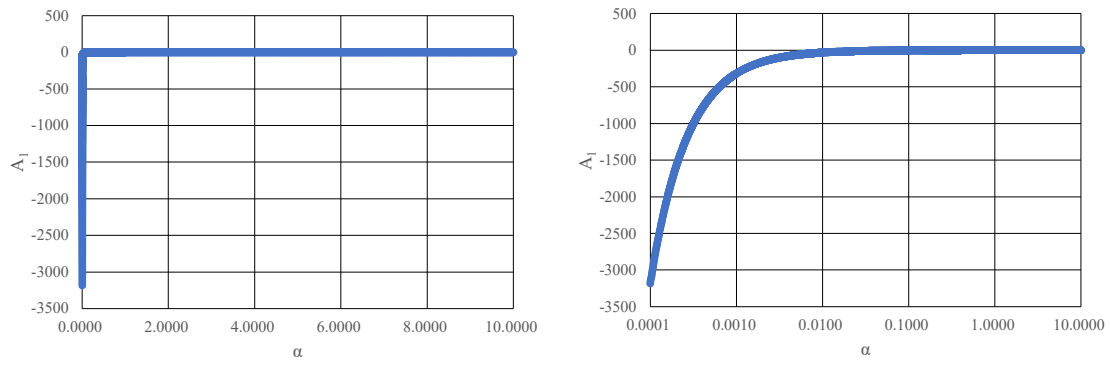
そのため新プログラムではハンケル関数を内部で算出するのではなく、複素数 $\alpha \cdot (1 + i)$ に対応する多くのハンケル関数の真値 $A_1(\alpha)$ 、 $B_1(\alpha)$ 、 $A_0(\alpha)$ をあらかじめ算出してプログラム内のExcelシートに格納しておき、荷重スキャンの結果から算出される $\alpha = p/(\sqrt{2} \cdot l)$ の値に最も近い2つの α_1 及び α_2 と、その α_1 及び α_2 に対応したハンケル関数の真値をExcelシートから読み込んで処理を行うこととした。

プログラムのExcelシートに格納するハンケル関数の真値の算出には、カシオ計算機株式会社が管理運営するWEBサイト「keisan サービス」を用いることにした。このWEBサイトには、各種の関数を対象とした多数のWEBページが用意されており、ハンケル関数の連続解析が可能な「ハンケル関数（グラフ）」WEBページでは、引数である複素数の初期値と増分を入力することでハンケル関数値を連続的に算出することが可能である。ただし、この「ハンケル関数（グラフ）」WEBページでは出力値の桁数を指定できなかったため、念のため、桁数を指定し連続的に各種関数の算出が可能な当該WEBサイトの「フリー計算」WEBページを用い、出力値の桁数は22桁とした（最終的にプログラムのExcelシートに格納する際にはExcelの桁数制限を受けるため、格納したハンケル関数値の桁数はこれよりも小さくなる）。

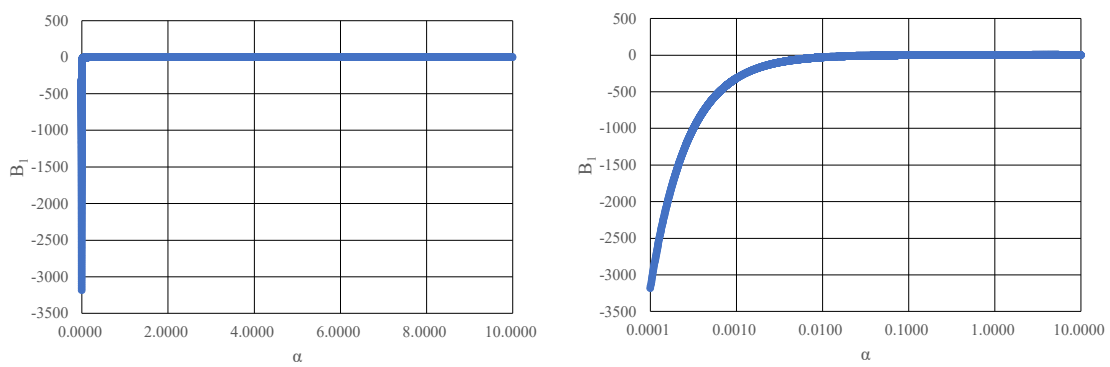
複素数 $\alpha \cdot (1 + i)$ の場合の $A_1(\alpha)$ 、 $B_1(\alpha)$ 、 $A_0(\alpha)$ を図化すると図-3.7のとおりとなる。 α は細分化した扇形荷重の長さを係数で除した値であるが、小さい α を使用するのは短い扇形荷重、例えば、載荷重縁が原点に近接している場合である。また、大きい α を使用するのは長い扇形荷重、例えば、載荷重が原点から遠い位置に配置されている場合である。そのため、舗装構造解析で想定される条件を考慮し、 α を0.0001から10までのハンケル関数の真値を算出しプログラムのExcelシートに格納することとした。この α の範囲は、コンクリート舗装構造の剛比半径 l に750mm程度を仮定すれば、おおむねm単位と考えた場合の扇形荷重の長さ p に相当するため、原点からの距離が0.1mm程度から10m程度までの位置にある載荷重の解析を行うことが可能である。なお、コンクリート版厚が厚くなると剛比半径が長くなり、算出される α は小さくなるため、更に遠方の載荷重の解析に対応していることになる。

ここで課題となるのが、 α が0.0001から10の範囲について、どの程度の数の α に対するハンケル関数の真値をプログラム内のExcelシートに格納すべきかである。格納したハンケル関数の真値の使用方法は図-3.8のように以下の2通りがある。

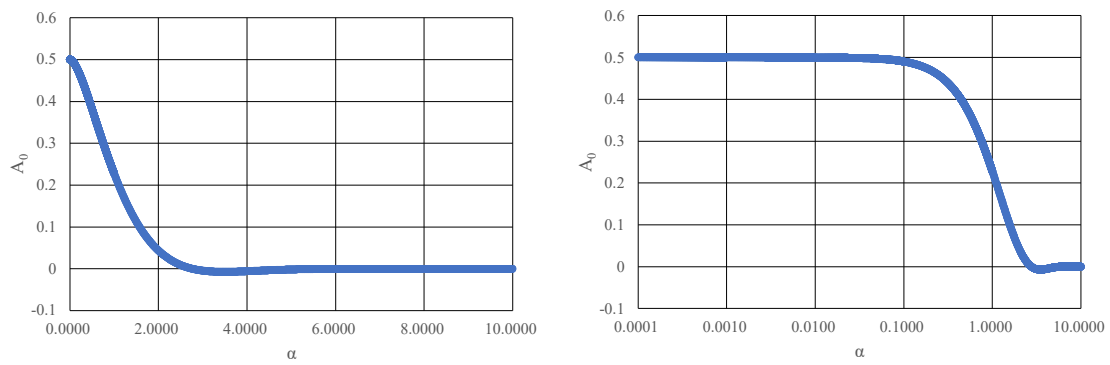
- ・ 荷重スキャンの結果から算出された α の前後の α_1 及び α_2 と、その α_1 及び α_2 のハンケル関数の真値から、線形補間で α のハンケル関数の近似値を算出し、そのハンケル関数の近似値から α のたわみ・曲げモーメントの近似値を算出する。
- ・ 荷重スキャンの結果から算出された α の前後の α_1 及び α_2 と、その α_1 及び α_2 のハンケル関数の真値から、 α_1 及び α_2 のたわみ・曲げモーメントの真値を算出し、そのたわみ・曲げモーメントの真値から線形補間で α のたわみ・曲げモーメントの近似値を算出する。



(a) 第1種1次ハンケル関数の実数部分 $A_1(\alpha)$



(b) 第1種1次ハンケル関数の虚数部分 $B_1(\alpha)$



(c) 第1種0次ハンケル関数の実数部分 $A_0(\alpha)$

図-3.7 α とハンケル関数値の関係 (左は横軸が通常目盛, 右は横軸が対数目盛)

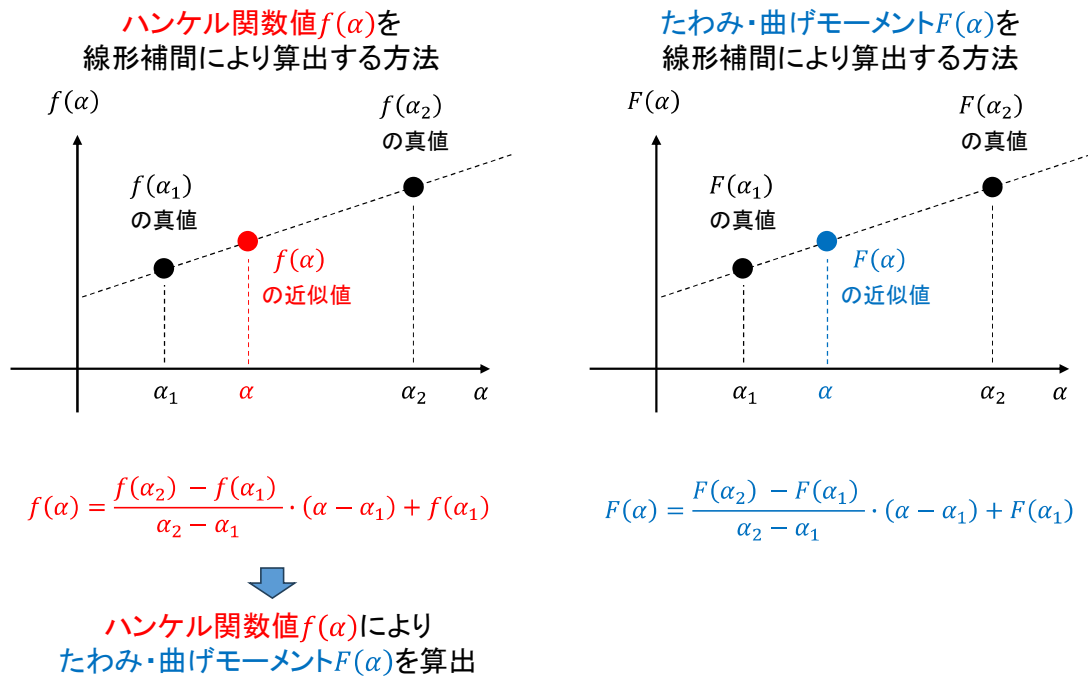


図-3.8 線形補間の概要

当初は前者の線形補間方法で、ハンケル関数の真値と近似値の誤差が小さくなるよう α の間隔を設定することを考えた。しかしながら試算したところ、 α が概ね 0.05 以下の領域では（ただし、この領域のたわみ・曲げモーメントはほぼ 0 であるため、解析精度への影響は軽微であるが）、線形補間により算出したハンケル関数の近似値を用いると、たわみの誤差が非常に大きくなるため、 α の間隔を小さく設定する必要があった。これは、 α が小さい領域では $A_1(\alpha)$ も $B_1(\alpha)$ も非常に大きな負の値となるが、 $A_1(\alpha)$ と $B_1(\alpha)$ の差を用いている曲げモーメントと異なり、たわみでは $A_1(\alpha)$ と $B_1(\alpha)$ の和を用いており、さらに、この非常に大きな負の値である $A_1(\alpha) + B_1(\alpha)$ に、非常に小さな値である α を乗じてたわみを算出していることが原因と考えられる。

この解析の目的は、ハンケル関数値を精度よく算出することではなく、たわみ・曲げモーメントを精度よく算出することであるから、後者の線形補間方法により、式-3.16のたわみ式の一部の項である式-3.18のたわみ成分 $C(\alpha)$ と、式-3.17の曲げモーメント式の一部の項である式-3.19の曲げモーメント成分 $D(\alpha)$ について、真値と近似値の誤差を確認し α の間隔を設定することとした。ここでは、たわみ成分 $C(\alpha)$ と曲げモーメント成分 $D(\alpha)$ の算出に $\theta_2 = 0.5$ 度、 $\theta_1 = -0.5$ 度を用いた。これはスキャン角度 θ が 0 度（正の x 軸方向）、スキャン角度幅 $\Delta\theta$ が 1 度の扇形荷重を想定したものである。図-3.9にたわみ成分 $C(\alpha)$ と曲げモーメント成分 $D(\alpha)$ を示すが、 α が 0.1 未満の場合はおおむね 0 であり、 α が 0.1 以上では急激に変化する傾向がある。

$$C(\alpha) = w(\theta_2, \theta_1, p) \cdot \frac{K}{q} = \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \left[1 + \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \cdot (A_1(\alpha) + B_1(\alpha)) \right] \quad \dots \dots \dots \text{式-3.18}$$

$$D(\alpha) = M(\theta_2, \theta_1, p) \cdot \frac{8}{q \cdot l^2} = (1 + \mu) \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot \alpha \cdot (A_1(\alpha) - B_1(\alpha))$$

$$+ (1 - \mu) \cdot (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \cdot \left\{ \frac{\alpha}{2} \cdot (A_1(\alpha) - B_1(\alpha)) + A_0(\alpha) - 0.5 \right\} \quad \text{式-3.19}$$

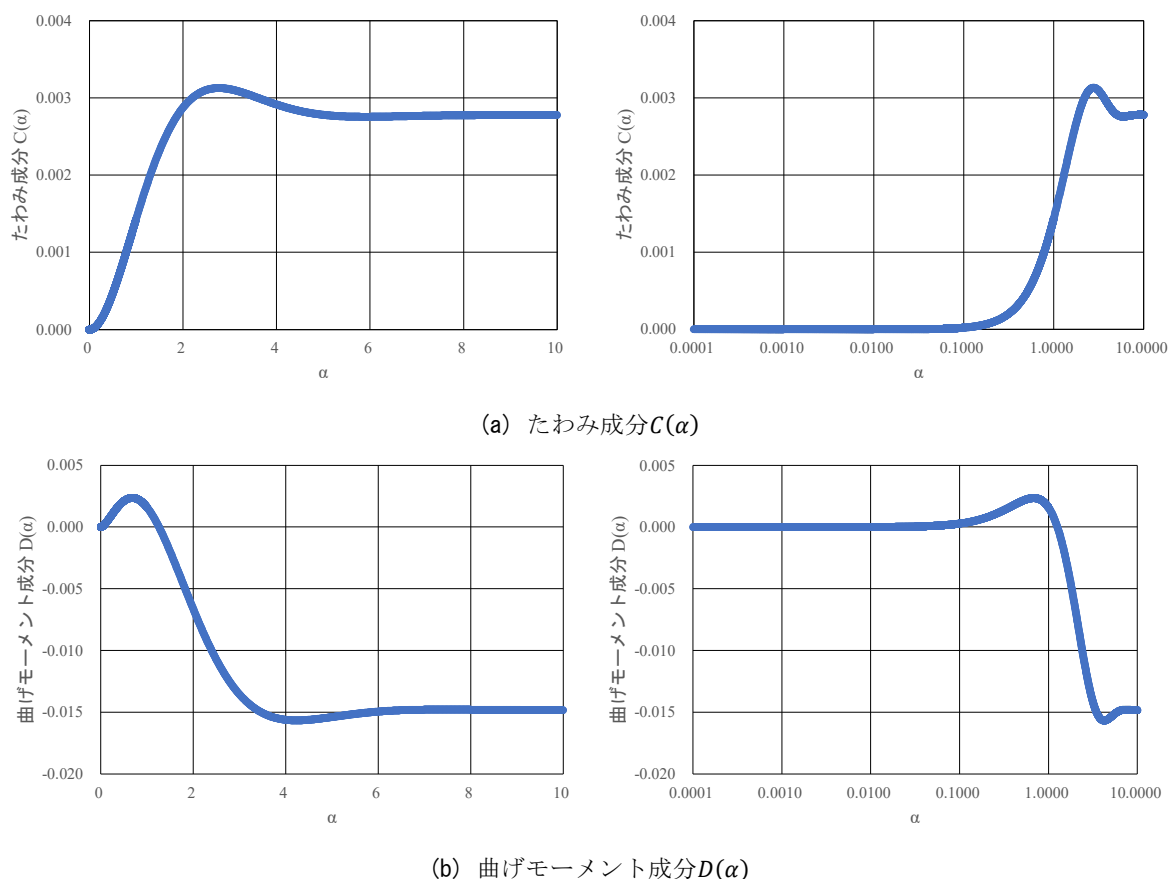


図-3.9 α とたわみ成分・曲げモーメント成分の関係（左は横軸が通常目盛，右は横軸が対数目盛）

試算結果を参考に，プログラム内の Excel シートに格納する 0.0001 から 10 までの α を 5 つの領域に分け，それぞれの領域で α の間隔を設定し，たわみ成分・曲げモーメント成分の最大誤差を算出した結果を表-3.5 に示す．この最大誤差の算出は， $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ と設定して図-3.8 右のように算出した α のたわみ成分・曲げモーメント成分の近似値 4,500 個と，検証用に別途算出した $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ のハンケル関数の真値によるたわみ成分・曲げモーメント成分の真値 4,500 個を比較することにより算出した．この結果を見ると， α が 1 以上 10 以下の領域の曲げモーメント成分の最大誤差が 0.4%程度と若干大きくなるが，この最大誤差を確認したところ，図-3.9 (b)に示した曲げモーメント成分が概ね 0 となる $\alpha = 1.25$ 付近で局所的に誤差が大きくなっているものであり，この領域の平均誤差は 0.0006%と極めて小さいことから，実用上は問題ないものと判断し，全 4,501 個の α に対応するハンケル関数の真値をプログラム内の Excel シートに格納し利用することとした． α が小さい領域では，そもそもたわみも曲げモーメントもほぼ 0 であるため， α の数をこれより少なくしても解析精度への影響は軽微であるが，後述する規則性を維持するため他の範囲と同様の 900 個とした．

プログラム内の Excel シートに格納した 4,501 通りのハンケル関数の真値を用いる場合，荷重スキャンにより算出された α の前後の α_1 及び α_2 を Excel シート内から探す必要がある．細分化された全ての扇形荷重の α について，この 4,501 個の α の中から順次確認することでも問題はないが，若干時間を要するため，表-3.5 の 4,501 通りの規則性（ α の間隔を，各領域の α の最小値の 1/100 とする）を前提とした場合のハンケル関数真値の配列番号を式-3.20 及び式-3.21 により特定することで，順次確認することを不要とした．配列番号の確認試算結果を表-3.6 に示す．

表-3.5 たわみ成分・曲げモーメント成分の最大誤差

領域 番号	α	α の間隔 (領域最小値の 1/100)	α の数 (個)	最大誤差 (%)	
				たわみ 成分	曲げモーメント 成分
1	0.0001 以上 0.001 未満	0.000001	900	0.002	0.002
2	0.001 以上 0.01 未満	0.00001	900	0.002	0.002
3	0.01 以上 0.1 未満	0.0001	900	0.002	0.002
4	0.1 以上 1 未満	0.001	900	0.002	0.001
5	1 以上 10 以下	0.01	901	0.001	0.403
α の数の合計			4,501		

$$n_1 = \text{int}[\alpha \cdot 10^{\{7 - \text{int}[\gamma]\}}] - 100 + 900 \cdot (\text{int}[\gamma] - 1) + 1 \quad \dots \dots \dots \text{式-3.20}$$

$$n_2 = n_1 + 1 \quad \dots \dots \dots \text{式-3.21}$$

ここで,

- n_1 : 4,501 通りの α とハンケル関数の真値を格納した配列内において
 $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ の α_1 に対応する配列番号 (1～4,500)
- n_2 : 4,501 通りの α とハンケル関数の真値を格納した配列内において
 $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ の α_2 に対応する配列番号 (2～4,501)
- α : 荷重スキャンにより細分化した扇形荷重の長さ p を $\sqrt{2} \cdot l$ で除した値
- $\text{int}[\]$: 小数切り捨ての関数
- γ : $\log_{10}(\alpha) + 5$

表-3.6 配列番号の確認試算結果

領域 番号	配列 番号	α	γ	$\text{int}[\gamma]$	$\alpha \cdot 10^{\{7-\text{int}[\gamma]\}}$	$\text{int}[\alpha \cdot 10^{\{7-\text{int}[\gamma]\}}]$	n_1	n_2
1	1	0.0001000	1.0000	1	100.0	100	1	2
	試算値	0.0001003	1.0013	1	100.3	100	1	2
	2	0.0001010	1.0043	1	101.0	101	2	3
	～配列番号 3～899 は省略～							
	900	0.0009990	1.9996	1	999.0	999	900	901
	試算値	0.0009991	1.9996	1	999.1	999	900	901
2	901	0.001000	2.0000	2	100.0	100	901	902
	試算値	0.001004	2.0017	2	100.4	100	901	902
	902	0.001010	2.0043	2	101.0	101	902	903
	～配列番号 903～1,799 は省略～							
	1800	0.009990	2.9996	2	999.0	999	1800	1801
	試算値	0.009992	2.9997	2	999.2	999	1800	1801
3	1801	0.01000	3.0000	3	100.0	100	1801	1802
	試算値	0.01005	3.0022	3	100.5	100	1801	1802
	1802	0.01010	3.0043	3	101.0	101	1802	1803
	～配列番号 1,803～2,699 は省略～							
	2700	0.09990	3.9996	3	999.0	999	2700	2701
	試算値	0.09991	3.9996	3	999.1	999	2700	2701
4	2701	0.1000	4.0000	4	100.0	100	2701	2702
	試算値	0.1004	4.0017	4	100.4	100	2701	2702
	2702	0.1010	4.0043	4	101.0	101	2702	2703
	～配列番号 2,703～3,599 は省略～							
	3600	0.9990	4.9996	4	999.0	999	3600	3601
	試算値	0.9993	4.9997	4	999.3	999	3600	3601
5	3601	1.000	5.0000	5	100.0	100	3601	3602
	試算値	1.007	5.0030	5	100.7	100	3601	3602
	3602	1.010	5.0043	5	101.0	101	3602	3603
	～配列番号 3,603～4,499 は省略～							
	4500	9.990	5.9996	5	999.0	999	4500	4501
	試算値	9.994	5.9997	5	999.4	999	4500	4501
	4501	10.000	6.0000	6	100.0	100	—	—

※確認試算用の α としては、その前後の α 間のランダムな値を採用した。

3.5 スキャン角度幅の設定

現プログラムでは「原点が楕円内の場合」「原点が楕円縁の場合」は港研資料⁸⁾に記載のとおりスキャン角度幅（図-3.10の $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ）を3度とし、「原点が楕円外の場合」はソースコードによると原点を通る2本の楕円接線間の角度を20分割あるいは40分割した値をスキャン角度幅 $\Delta\theta$ としている。「原点が楕円外の場合」は、図-3.10に示すように載荷重が原点から遠くなると扇形荷重の弧が長くなり荷重スキャンが粗くなるため、楕円形の寸法を基にスキャン角度幅を設定したと推測している。

スキャン角度幅 $\Delta\theta$ が小さいほど正確に荷重スキャンを行うことができるため精度は高くなるが、解析に時間を要するため、本節では新プログラムで設定するスキャン角度幅 $\Delta\theta$ を検討した。なお、新プログラム内部では角度を0.01度単位の整数（例えば90度は9,000）として処理することとした関係で、理由は3.6で述べるが、整数で表したスキャン角度幅 $\Delta\theta$ の1/2の値も整数であること、90度をスキャン角度幅 $\Delta\theta$ で除した値も整数であることも必要である。そのため表-3.7に示すように、この検討ではスキャン角度幅 $\Delta\theta$ を最小の0.02度とした場合のたわみ及び最大主応力を基準として、その他のスキャン角度幅 $\Delta\theta$ を用いた場合のたわみ及び最大主応力の差を確認することとした。

表-3.8及び表-3.9に解析条件を示す。ここでは楕円形荷重と正方形荷重を対象とし、原点が載荷重内にある場合と載荷重外にある場合に分けて分析を行うこととした。

原点が載荷重内にある場合の解析結果を図-3.11に示す。縦軸は表-3.8に示した4つの出力点のたわみと最大主応力について、スキャン角度幅 $\Delta\theta$ を0.02度とした場合との最大の差を%単位で示している。スキャン角度幅 $\Delta\theta$ の増加とともに差は大きくなり、正方形荷重の方が楕円形荷重より差が大きくなるが、差の最大は0.07%程度と非常に小さい。

原点が載荷重外にある場合の解析結果を図-3.12に示す。縦軸は表-3.8に示した5つの出力点のたわみと最大主応力について、スキャン角度幅 $\Delta\theta$ を0.02度とした場合との最大の差を%単位で示している。この場合は楕円形荷重の方が正方形荷重よりも差が大きいこと、差の最大は1.3%程度と比較的大きいことがわかる。

以上の結果から、原点が載荷重内にある場合は、スキャン角度幅 $\Delta\theta$ を増加させても差が非常に小さいため、解析速度を優先してスキャン角度幅 $\Delta\theta$ を1度とすることとした。また、原点が載荷重外にある場合は、スキャン角度幅 $\Delta\theta$ を増加させると1%を超える差が発生するため、スキャン角度幅 $\Delta\theta$ を0.1度とすることとした。

表-3.7 確認用に設定したスキャン角度幅 $\Delta\theta$

スキャン角度幅 $\Delta\theta$		0.01度単位の 整数値の1/2	90度を スキャン角度幅 で除した値	採用可否
度単位	0.01度単位の 整数値			
0.01	1	非整数	整数	不可
0.02	2	整数	整数	可
0.03	3	非整数	整数	不可
0.04	4	整数	整数	可
0.05	5	非整数	整数	不可
0.06	6	整数	整数	可
0.07	7	非整数	非整数	不可
0.08	8	整数	整数	可
0.09	9	非整数	整数	不可
0.10	10	整数	整数	可
0.20	20	整数	整数	可
0.30	30	整数	整数	可
0.50	50	整数	整数	可
1.00	100	整数	整数	可
2.00	200	整数	整数	可
3.00	300	整数	整数	可

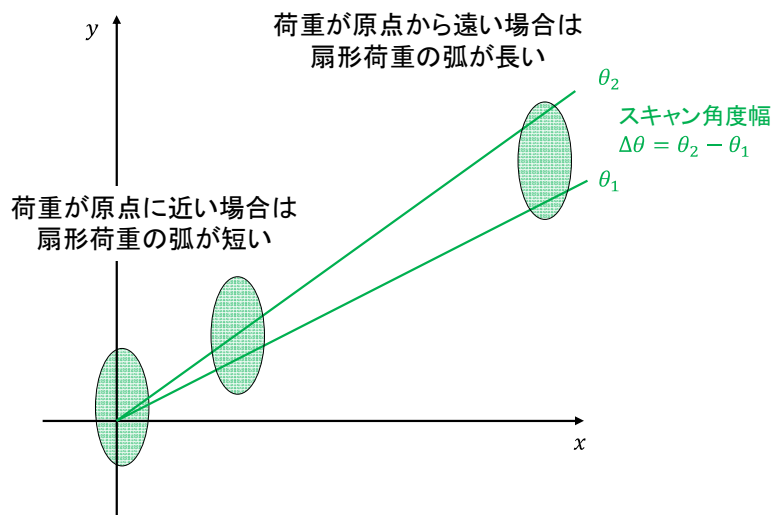


図-3.10 載荷重が原点から近い場合と遠い場合の違い

表-3.8 荷重条件

項目	入力値	
載荷重の数 (輪)	1	
載荷重中心の座標 (mm) 左がx座標, 右がy座標	0	0
載荷重の接地圧 (N/mm ²)	1.47	
載荷重 1 輪の接地面積 (mm ²)	160,000	
接地面積から算出される 楕円寸法 (mm)	短半径 : 184.10 長半径 : 276.63	
接地面積から算出される 正方形寸法 (mm)	辺長 : 400.00	

表-3.9 応答出力点及び舗装構造条件

項目	入力値			
原点の位置	載荷重内		載荷重外	
応答出力点の座標 (mm) 左がx座標, 右がy座標	0	0	300	300
	50	50	500	500
	100	100	1,000	1,000
	150	150	2,000	2,000
	—	—	3,000	3,000
コンクリートの弾性係数 (N/mm ²)	33,320			
コンクリートのポアソン比	0.15			
コンクリート版厚 (mm)	420			
路盤の支持力係数 (MN/m ³)	68.6			

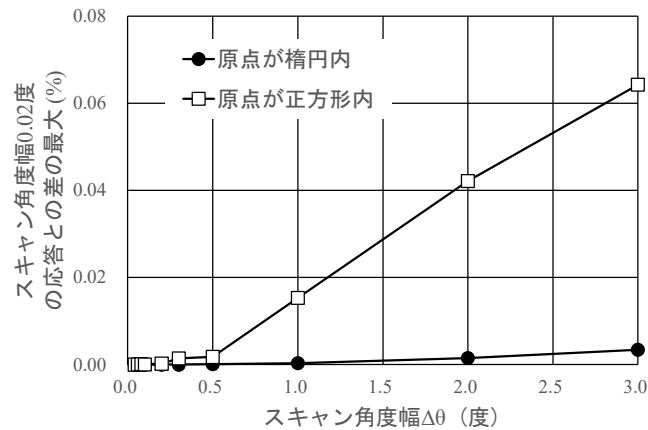


図-3.11 原点が載荷重内の場合の解析結果

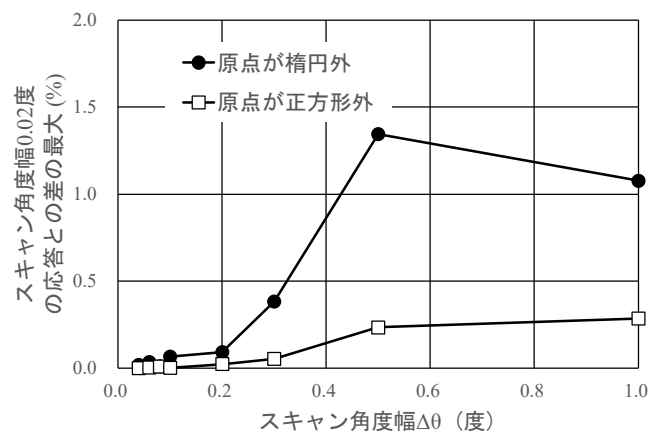


図-3.12 原点が載荷重外の場合の解析結果

3.6 荷重スキャン範囲の設定

載荷重の位置や寸法に関わらず、前述のスキャン角度幅を用いて 0 度から 360 度まで荷重スキャンを実施し載荷重を扇形荷重に細分化していけばよいが、載荷重が存在しない角度についても荷重スキャンを実施することとなり、解析に時間を要する。そのため、載荷重の位置に応じた荷重スキャン範囲を表-3.10 のとおり設定することとした。厳密には表の「必要な荷重スキャン範囲」のみの荷重スキャンでよいのであるが、条件分岐や荷重スキャン範囲の始角度・終角度近傍の端数角度処理がやや煩雑となること、3.1 に記載したとおり荷重スキャンを実施する頻度を解析 1 ケースにつき 1 回のみと削減しているため、簡易な条件分岐で対応することとした。

表-3.10 には荷重スキャンを実施する場合のスキャン角度 θ の始角度・終角度も記載している。具体的には図-3.13 のようになるが、始角度を 0 度ではなく $\Delta\theta/2$ としているため、扇形荷重の長さ p を算出する際のスキャン角度 θ に 0 度・90 度・180 度・270 度が設定されることはない。これは矩形荷重を対象とした荷重スキャンで、扇形荷重の長さ p の分母に使用する $\sin\theta$ と $\cos\theta$ が 0 となる場合の特別な処理を不要とするためであり、3.5 で述べた「整数で表したスキャン角度幅 $\Delta\theta$ の 1/2 の値も整数であることが必要」とした理由である。また、3.5 で述べた「90 度をスキャン角度幅で除した値も整数であることが必要」としたのは以下の理由による。例えばスキャン角度幅 $\Delta\theta$ を、前述の要件に合致しない 0.7 度とした場合、0 度から 360 度までを 514 分割あるいは 515 分割することとなるが、スキャン角度幅の合計が 359.8 度あるいは 360.5 度となり、終角度付近に載荷重が配置されている場合、荷重スキャンにおいて載荷重の一部の未計上または二重計上が生じるためである。

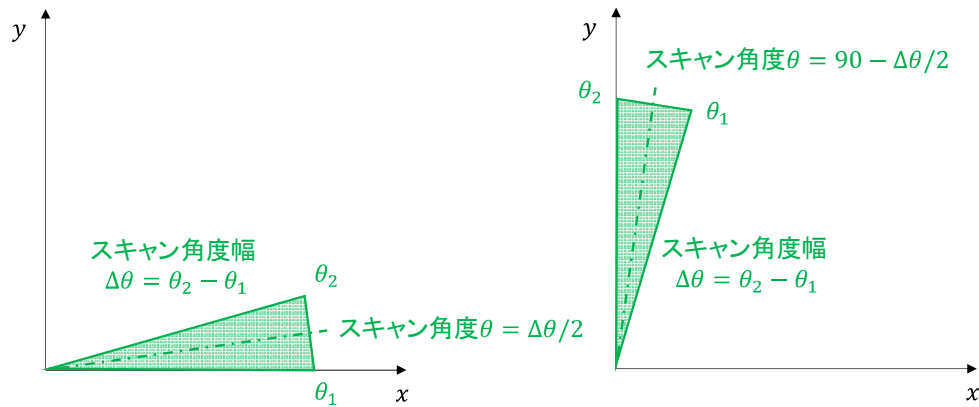


図-3.13 スキャン角度 θ の始角度と終角度（荷重スキャン範囲が第一象限の場合）

表-3.10 荷重スキャン範囲（ $\Delta\theta$ は3.5で決定したスキャン角度幅 $\theta_2 - \theta_1$ ）

原点の位置	載荷重形状	必要な荷重スキャン範囲	設定した荷重スキャン範囲とスキャン角度 θ の始角度・終角度
載荷重内	円形 楕円形 矩形	0度から 360度まで	0度から 360度まで スキャン角度 θ は 始角度： $\Delta\theta/2$ 度から 終角度： $360 - \Delta\theta/2$ 度まで $\Delta\theta$ 刻み
載荷重縁	円形 楕円形 矩形	接線角度から 角度幅180度 (図-3.6(b)を参照) 接線角度から 角度幅90度あるいは180度 (図-3.2を参照)	
載荷重外	円形 楕円形 矩形	2本の接線で 囲まれる角度幅	載荷重が存在する 1つの象限（角度幅90度） あるいは 2つの象限（角度幅180度） スキャン角度θは 始角度：$90(n-1) + \Delta\theta/2$度から 終角度：$\theta_{end} - \Delta\theta/2$度まで $\Delta\theta$刻み 1つの象限の場合$\theta_{end} = 90n$ 2つの象限の場合$\theta_{end} = 90(n+1)$ nは象限に応じた整数（1～4）

3.7 まとめ

前節までの内容を基に VBA でプログラムを再構築した。新プログラムの処理の流れは表-3.11 のとおりである。また、主に使用面に関する現プログラムと新プログラムの違いをまとめると表-3.12 のとおりである。

表-3.11 新プログラムの処理の流れ

項目	内容
入力条件の読み込み	荷重条件及び解析条件を読み込み、不正な入力があれば該当セルを赤色に着色し、理由をメッセージボックスに表示して処理を終了する。
荷重スキャン	加算応答値及び減算応答値の扇形荷重の長さや角度を整理する。0.0001 未満の α が検出された場合は影響が軽微であるため無視して解析を続行する。10 以上の α が検出された場合は理由をメッセージボックスに表示して処理を終了する。
配列の統合	荷重スキャンにより扇形荷重の総数が確定したため、加算応答値用と減算応答値用に区別していた扇形荷重に関する配列を、一つの配列に統合する。
ハンケル関数値の特定	Excel シートに格納している 4,501 通りのハンケル関数の真値の中から、扇形荷重の α の前後のハンケル関数の真値を特定する。
たわみ・応力の算出	たわみ・応力を算出する。応力は脚荷重角度に依存するため、脚荷重角度を 0 度から 179 度まで 1 度ステップで変化させて解析を行う。
解析結果の出力	解析結果を出力する。必要に応じ動作確認用として、指定した解析条件番号の荷重スキャンで得られた全ての扇形荷重の詳細情報及び図-4.2 と同様の図を描画する。

表-3.12 使用面に関する現プログラムと新プログラムの違い

項目	現プログラム	新プログラム
入力ファイル	1 条件で 1 つのテキストファイルを作成するが、コンクリート版厚、路盤の支持力係数、脚荷重角度については、最小値、最大値、ステップ量を入力することにより 1 つのファイルで連続解析が可能。	最大 100 条件を 1 つの Excel シートに入力する。
出力ファイル	1 つの入力ファイルに対して 1 つの出力ファイルが作成される。	全ての解析結果が 1 つの Excel シートに出力される。
応答出力点	1 つの入力ファイルで 1 点。	最大 100 点まで。
最大主応力と 方向の確認	脚荷重角度を 0～179 度に設定した 連続解析を行い、解析結果から確認する。	自動で最大主応力と方向が出力される。
考慮可能な載荷重	楕円形荷重（接地面積から設定）	円形荷重 楕円形荷重（接地面積から設定） 楕円形荷重（自由に設定） 矩形荷重
単位系	CGS 単位系	SI 単位系

4. 考察

4.1 精度の確認

現プログラムと新プログラムを用いて図-4.1、表-4.1 及び表-4.2 に示す解析条件で、9 つの応答出力点におけるたわみと最大主応力の精度を確認した。

現プログラムと新プログラムによるたわみと最大主応力を表-4.3 に示す。現プログラムは CGS 単位系で有効数字 3 桁の出力であることに起因する差、新プログラムのスキャン角度幅が小さく、高精度に荷重スキャンを実施していることに起因する差も含まれるが、全体の差の平均が 0.35%程度であり、現プログラムの解析を再現できていると考えられる。

前述の解析結果のうち、応答出力点を原点とした場合の荷重重とスキャン直線の交点を描画したのが図-4.2 である。赤色で示したのが加算応答値用の p_+ に関する交点、青色で示したのが減算応答値用の p_- に関する交点であるが、荷重重縁の原点側を減算応答値、反対側を加算応答値として荷重スキャンが正確に行われていることがわかる。この荷重スキャン結果の詳細を表-4.4 に示すが、扇形荷重の面積の合計は入力値にほぼ等しい。なお、図-4.2 及び表-4.4 には、同じ解析条件で荷重重形状を辺長 400mm の正方形荷重とした場合の荷重スキャン結果も示すが、傾向は同様である。

図-4.1、表-4.1 及び表-4.2 に示す解析条件の場合、1 つの応答出力点について現プログラムによる解析に要した時間の内訳は表-4.5 のとおりであった。最も時間を要しているのは応力算出の過程であるが、最大主応力を確認するために脚荷重角度を 0~179 度の範囲で 1 度ステップに変化させているため、脚荷重角度に依存しないたわみ算出の過程の約 180 倍の解析を行っているためである。

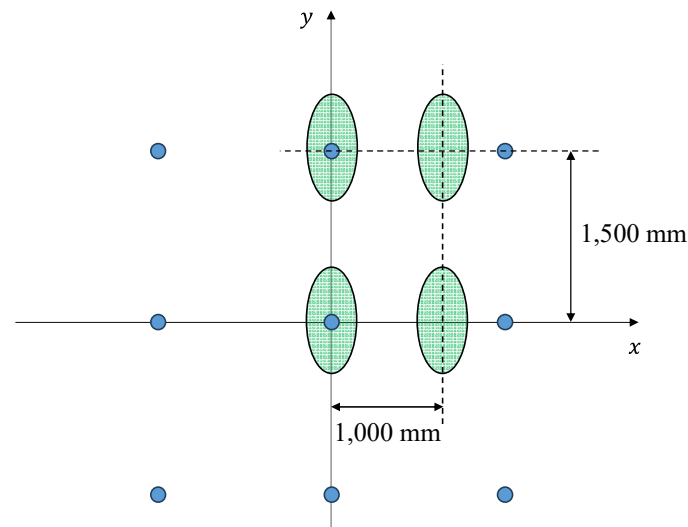


図-4.1 荷重重と応答出力点の位置

表-4.1 荷重条件

項目	入力値	
荷重重の数 (輪)	4	
荷重重中心の座標 (mm) 左がx座標, 右がy座標	0	0
	0	1,500
	1,000	0
	1,000	1,500
荷重重の接地圧 (N/mm ²)	1.47	
荷重重 1 輪の接地面積 (mm ²)	160,000	
接地面積から算出される 楕円寸法 (mm)	短半径 : 184.10 長半径 : 276.63	

表-4.2 応答出力点及び舗装構造条件

項目	入力値	
応答出力点の数 (点)	9 点	
応答出力点の座標 (mm) 左がx座標, 右がy座標	0	0
	1,500	0
	1,500	1,500
	0	1,500
	-1,500	1,500
	-1,500	0
	-1,500	-1,500
	0	-1,500
	1,500	-1,500
コンクリートの弾性係数 (N/mm ²)	33,320	
コンクリートのポアソン比	0.15	
コンクリート版厚 (mm)	420	
路盤の支持力係数 (MN/m ³)	68.6	

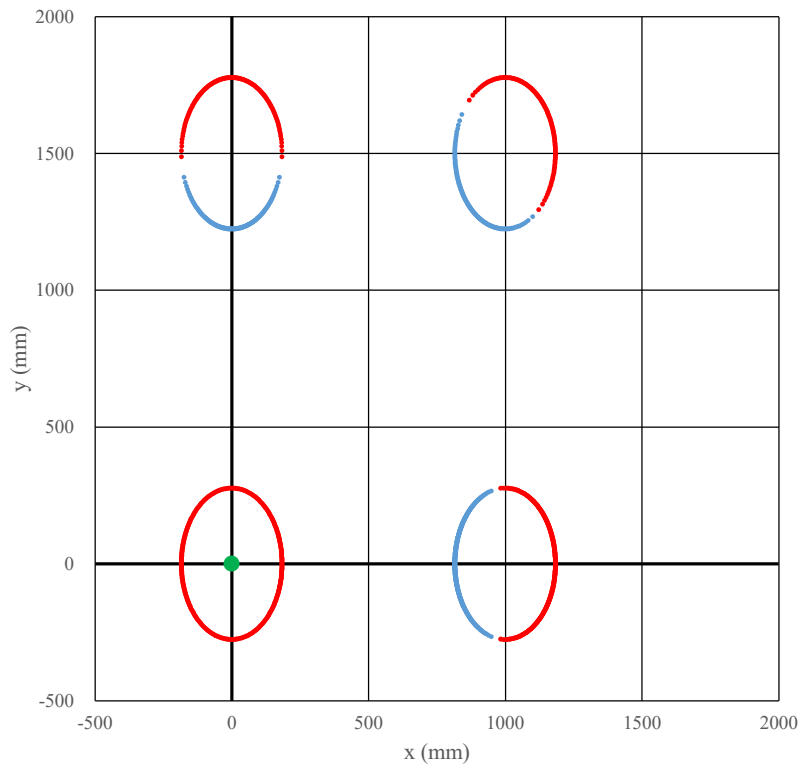
表-4.3 解析結果

応答出力点の座標		たわみ (mm)			最大主応力 (N/mm ²)		
x (mm)	y (mm)	現プログラム	新プログラム	差 (%)	現プログラム	新プログラム	差 (%)
0	0	0.679	0.6775	0.219	2.5399	2.5320	0.311
1,500	0	0.588	0.5864	0.281	1.5102	1.5054	0.321
1,500	1,500	0.588	0.5864	0.281	1.5102	1.5054	0.321
0	1,500	0.679	0.6775	0.219	2.5399	2.5320	0.311
-1,500	1,500	0.356	0.3543	0.484	0.6159	0.6130	0.457
-1,500	0	0.356	0.3543	0.484	0.6159	0.6130	0.457
-1,500	-1,500	0.195	0.1947	0.173	0.3128	0.3113	0.506
0	-1,500	0.344	0.3426	0.400	0.6884	0.6859	0.374
1,500	-1,500	0.306	0.3051	0.281	0.5894	0.5869	0.428

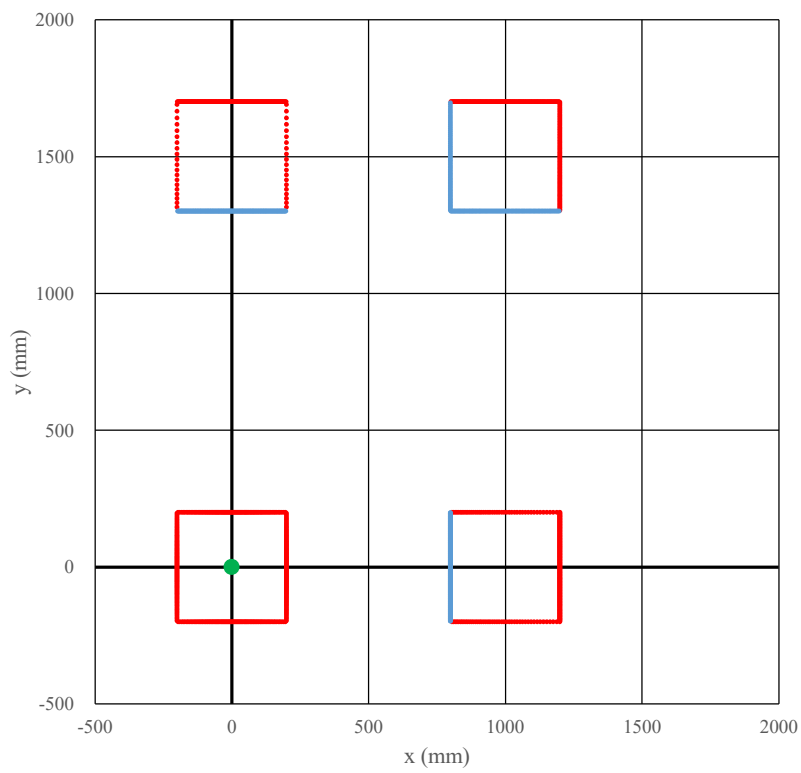
※現プログラムによる最大主応力は、単位 kgf/cm² の値を、重力加速度 9.80665 を用いて示している。

表-4.4 図-4.2 に示した荷重スキャン結果の詳細

載荷重 形状	載荷重とスキャン直線の交点			扇形荷重面積				
	加算用 (個)	減算用 (個)	合計 (個)	加算用 (mm ²)	減算用 (mm ²)	合計 (mm ²)	真値 (mm ²)	誤差 (%)
楕円形	955	595	1,550	1,356,232	-716,221	640,011	640,000	0.0017
正方形	989	629	1,618	1,477,937	-837,954	639,983		0.0026



(a) 楕円形荷重



(b) 正方形荷重

図-4.2 荷重スキャンによる交点座標

(赤が加算応答値用の p_+ , 青が減算応答値用の p_- に関する交点, 緑が応答出力点)

表-4.5 1つの応力出力点について解析に要した時間の平均値

項目	時間 (秒)	具体的な処理内容
荷重スキャン	0.001 以下	載荷重 4 輪を扇形荷重 1,550 個に細分化し長さや角度を特定
ハンケル関数値の特定	0.001 以下	1,550 個の扇形荷重の長さに応じたハンケル関数値を特定
たわみ算出	0.001 以下	1,550 個の扇形荷重の応答を算出し合算（脚荷重角度 1 ケース）
応力算出	0.112	1,550 個の扇形荷重の応答を算出し合算（脚荷重角度 180 ケース）
合計	0.114	

4.2 最大主応力の発生位置及び方向の傾向

コンクリート舗装の設計では、コンクリート版下面に発生する最大主応力を用いる。福手は1脚2輪（B727-200, DC9-41）及び1脚4輪（B747-200B, DC8-63）の航空機脚荷重を対象として試算した結果、最大主応力の方向及び最大主応力の発生位置が変化する傾向を明らかにしている⁸⁾。そのため、最大主応力を確認するためには、脚荷重角度や応答出力点の座標を変化させて解析を行う必要がある。

現プログラムでは脚荷重角度を変化させた連続解析が可能であったが、脚荷重シフト量により応答出力点を変化させた連続解析を行うことができなかったため、応答出力点の座標の数だけ入力テキストファイルを作成し解析する必要があった。一方、新プログラムでは、脚荷重角度を自動的に 0～179 度で変化させた結果として最大主応力が出力されるとともに、多数の応答出力点を対象とした連続解析が容易となったため、この利点を生かして本節では、脚荷重を構成する複数の載荷重の横中心間隔・縦中心間隔を変化させた場合の最大主応力の発生位置の傾向を明らかにすることを試みた。解析条件は、いくつかの代表的な航空機の脚荷重寸法を参考に、図-4.3、表-4.6 及び表-4.7 のとおり設定した。

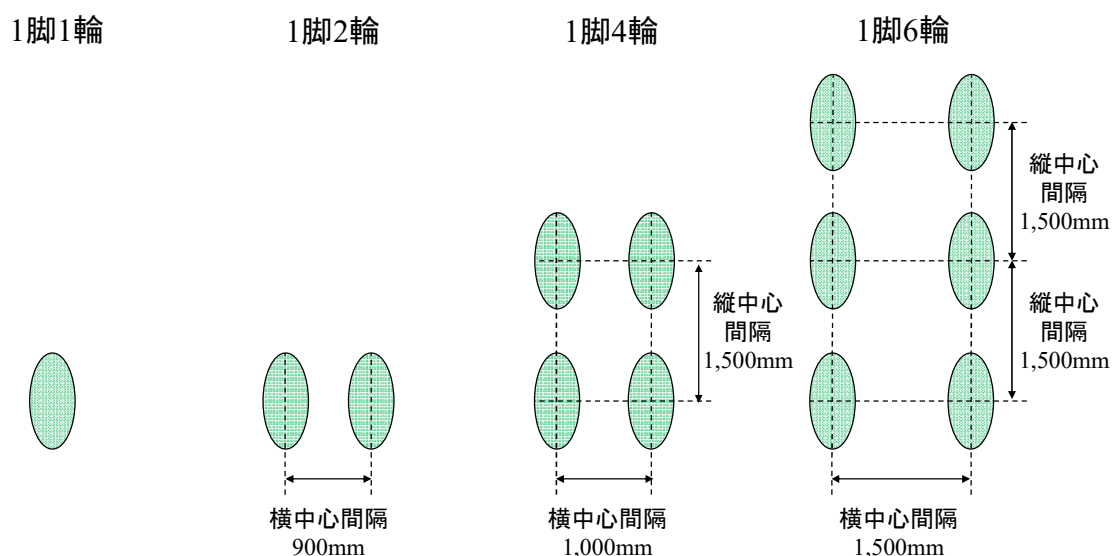


図-4.3 脚荷重寸法

表-4.6 荷重条件

項目	入力値							
脚輪数	1 脚 1 輪		1 脚 2 輪		1 脚 4 輪		1 脚 6 輪	
載荷重中心の座標 (mm) 左がx座標, 右がy座標	0	0	0	0	0	0	0	-1,500
	—	—	900	0	0	1,500	0	0
	—	—	—	—	1,000	0	0	1,500
	—	—	—	—	1,000	1,500	1,500	-1,500
	—	—	—	—	—	—	1,500	0
	—	—	—	—	—	—	1,500	1,500
載荷重の接地圧 (N/mm ²)	1.47							
載荷重 1 輪の接地面積 (mm ²)	160,000							
接地面積から算出される 楕円寸法 (mm)	短半径 : 184.10 長半径 : 276.63							

表-4.7 舗装構造条件

項目	入力値
コンクリートの弾性係数 (N/mm ²)	33,320
コンクリートのポアソン比	0.15
コンクリート版厚 (mm)	420
路盤の支持力係数 (MN/m ³)	68.6

図-4.4 を用いて解析結果を以下に述べる。

1 脚 1 輪の場合, 最大主応力は載荷重中心で発生し, 最大主応力方向は 0 度 (横断方向) となる。円形荷重や正方形荷重であれば, どの方向の応力も等しくなるが, 楕円形荷重の場合は短半径方向の応力が最大主応力となる。

1 脚 2 輪の場合, 最大主応力は載荷重中心から脚中心に向かって 80mm の位置で発生し, 最大主応力方向は, 他のケースと傾向が異なり 90 度 (縦断方向) となる。

1 脚 4 輪の場合, 最大主応力は載荷重中心から脚中心に向かって横断方向に 30mm, 縦断方向に 30mm の位置で発生し, 最大主応力方向は 28 度 (横断方向から時計回り) となる。これは, どの載荷重中心に着目しても, 他の 3 つの載荷重の影響を受けるためである。

1 脚 6 輪の場合, 最大主応力は脚の角にある載荷重近傍ではなく, 縦断方向中間にある載荷重近傍で発生することに留意する必要がある。この縦断方向中間の載荷重中心から脚中心に向かって横断方向に 30mm の位置で発生し, 最大主応力方向は 0 度 (横断方向) となる。

次に, 表-4.6 の荷重条件のうち, 脚荷重の横中心間隔・縦中心間隔を変化させた場合の結果を, 前述の結果とあわせて整理したのが表-4.8 である。1 脚 4 輪及び 1 脚 6 輪の場合, 最大主応力発生位置と最大主応力方向は載荷重の間隔により変化するものの, 変化の程度は大きくはない。一方, 1 脚 2 輪の場合は横中心間隔の影響をやや大きく受け, 横中心間隔が広がると, 一方の載荷重中心近傍の応答に及ぼす他方の載荷重の影響が小さくなることから, 最大主応力発生位置は徐々に載荷重中心に近づく傾向がある。ただし最大主応力方向は変化せず 90 度 (縦断方向) で一定である。

以上の結果はコンクリート版厚が薄い場合もほぼ同様の傾向であるため, 最大主応力位置を算出する際は, 表-4.8 に示した位置近傍にいくつかの応力出力点を設定し最大主応力を確認するとよい。

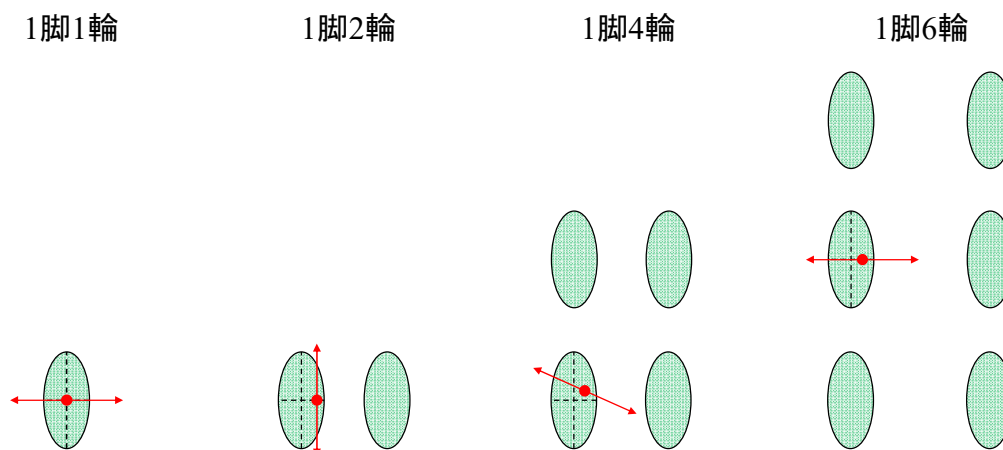


図-4.4 最大主応力発生位置と最大主応力方向

表-4.8 解析結果

脚輪数	変化条件	最大主応力の発生位置	最大主応力の方向
1 脚 1 輪	—	載荷重中心	横断方向
1 脚 2 輪	横中心間隔を 700～1300mm と変化させた場合	載荷重中心から 脚荷重中心へ向かって 横断方向に 60～110mm 縦断方向に 0mm	縦断方向
1 脚 4 輪	横中心間隔を 750～1250mm 縦中心間隔を 1250～1750mm と変化させた場合	載荷重中心から 脚荷重中心へ向かって 横断方向に 20～50mm 縦断方向に 20～60mm	19 度～37 度 (x 軸から時計回り)
1 脚 6 輪	横中心間隔を 1000～2000mm 縦中心間隔を 1000～2000mm と変化させた場合	縦断方向中間の載荷重中心から 脚荷重中心へ向かって 横断方向に 10～60mm 縦断方向に 0mm	横断方向

最後に、1 脚 1 輪の場合の最大主応力は横断方向、1 脚 2 輪の場合の最大主応力は縦断方向というように、最大主応力方向が極端に変化している現象を考察する。

1 脚 1 輪の場合の x 軸に沿った応力分布を図-4.5 左に示す。前述のとおり載荷重中心では $\sigma_x > \sigma_y$ であり、 σ_x が最大主応力であるが、 σ_x と σ_y は 6%程度の差にとどまる。一方、載荷重中心から離れると $\sigma_y > \sigma_x$ であり、 σ_y が最大主応力となるとともに、 σ_x と σ_y の差は比較的大きくなる。

1 脚 2 輪で横中心間隔を 900mm とした場合の応力分布を図-4.5 右に示すが、1 脚 1 輪の応力分布の重ね合わせとなるため、2 つの載荷重間に発生する応力は常に $\sigma_y > \sigma_x$ であり、位置に関わらず σ_y が最大主応力となる。また 1 脚 1 輪の場合で $\sigma_x > \sigma_y$ となるのは載荷重中心近傍の位置に限定されていたため、現実的な横中心間隔を想定すれば、1 脚 2 輪の横中心間隔が狭くても広くても σ_y が最大主応力となる傾向は変化しないのである。

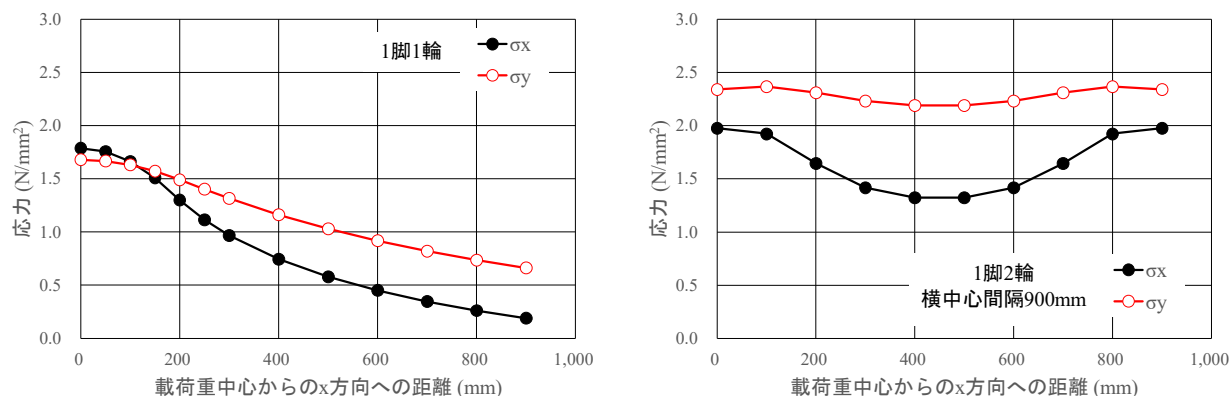


図-4.5 1脚1輪及び1脚2輪によるx軸に沿った応力分布

5. 結論

本資料における結論を以下に記す。

- (1) 今後の保守・改良を容易とすべく、効率的な荷重スキャン方法について検討した。その結果、円形荷重、楕円形荷重、矩形荷重を問わず、原点からスキャン直線と载荷重との交点までの長さの長短の順序及び正負の数により、必要な扇形荷重の長さを容易に得ることが可能であることを明らかにした。
- (2) 今後の保守・改良を容易とすべく、ハンケル関数の処理方法について検討した。その結果、多数のハンケル関数の真値をプログラム内のExcelシートに格納し、このハンケル関数値の真値から得られるたわみ及び曲げモーメントを用いた線形補間により、たわみ及び曲げモーメントを精度良く算出することが可能であることを明らかにした。
- (3) 以上の成果を基に、円形荷重、楕円形荷重、矩形荷重によるコンクリート舗装応答が解析可能となるよう改良したプログラムをVBAで再構築し、現プログラムの解析結果を再現可能であることを確認した。
- (4) 航空機脚荷重によりコンクリート版下面に発生する最大主応力は、载荷重中心から脚荷重中心へ向かって数十mmの位置で発生し、横中心間隔・縦中心間隔の影響は大きくはないことを明らかにした。最大主応力方向は、1脚2輪では縦断方向、1脚4輪では横断方向から30度前後(x軸から時計回り)の方向、1脚6輪では横断方向であり、1脚6輪の場合の最大主応力は縦断方向中間の载荷重近傍で発生することを整理した。

6. おわりに

福手は中央部载荷プログラムの構築と同時に、PickettとRayの研究成果⁷⁾を参考に、荷重がコンクリート版の縁部に载荷されている場合を対象とした縁部载荷プログラムも構築している⁸⁾。著者は本研究と並行して縁部载荷プログラムの再構築の検討も行い、難易度はそれほど高くはないとの結論を得たが、空港コンクリート舗装の設計では中央部载荷による応力を使用していること、縁部载荷プログラムのソースコード及び実行exeファイルが現存しないこともあり、現時点では縁部载荷プログラムの再構築は実施していない。なお、縁部载荷プログラムの再構築に関する検討結果として現時点で得られた要点を以下に記す。

- ・ 縁部载荷の場合のたわみ・曲げモーメントの算出ではハンケル関数は使用しない。その代わり数値積分が必要となるが、現プログラムの数値積分の設定は港研資料⁸⁾に記載されているので、本資料の3.4と同様に、解析結果への影響が軽微となる程度の数値積分間隔を確認して数値積分を行えばよいであろう。
- ・ 縁部载荷の場合の荷重スキャンは、本資料で示した「原点を含む扇形荷重」ではなく「原点を含み、x軸とy軸に正対する矩形荷重」により行う。港研資料⁸⁾に記載されているように载荷重をx軸に平行な短冊形に分割し、この短冊形荷重を4つの矩形荷重(加算応答値用が2つ・減算応答値用が2つ)で表すこととなる。しかしながら、3.1で述べた中央部载荷の場合とは異なり、脚荷重角度に応じて短冊形荷重の位置・大きさが変化するため、縁部载荷プログラムでは脚荷重角度を変化させるたびに荷重スキャンを行うことが必要となる。この場合、脚荷重を脚荷重角度 θ_a だけ

反時計回りに回転させた上で、 x 軸に平行なスキャン直線 $y = b$ により荷重スキャンを行うこととなるが、脚荷重は基本位置から変化させずに、スキャン直線を時計回りに θ_a だけ回転させた $y = x \cdot \tan(-\theta_a) + b$ とした方が処理は容易かもしれない。

- ・ 前述の理由で荷重スキャン回数が多くなるため、ワークシート関数を使用するのは避けたほうがよいかもしれない。これは新プログラムにおいて、度単位の角度を **radian** に変換する際、当初は **WorksheetFunction.Radians** を用いていたが、 $\pi/180$ による処理に変更したところ、解析に要する時間が 1/10 程度に短縮できたためである。
- ・ 福手は港研資料⁸⁾に縁部載荷プログラムを用いたいくつかの試算結果を掲載しているのですが、これらと同じ条件で解析を実施し動作確認を行うのがよい。あるいは、載荷重が縁部から離れた位置にある場合に、解析結果が中央部載荷の結果に近いものになることを確認したり、2.1 で述べたように曲げモーメントの影響図には正のブロックと負のブロックの境界が存在するため、この境界近傍に載荷重を配置した際の x 方向曲げモーメントが 0 となることを確認するとよい。

(2024 年 8 月 27 日受付)

参考文献

- 1) Westergaard, H.M.: Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analyses, Public Roads, Vol.7, No.2, 1926.
- 2) Westergaard, H.M.: Analytical Tools for Judging Results of Structural Tests of Concrete Pavements, Public Roads, Vol.14, No.10, 1933.
- 3) Westergaard, H.M.: Stresses in Concrete Runways of Airports, Proceedings of the 19th Annual Meeting of the Highway Research Board, 1939.
- 4) Westergaard, H.M.: Stresses Concentration in Plates Loaded over Small Areas, Transaction of ASCE, Vol.108, Paper No.2197, 1943.
- 5) Westergaard, H.M.: New Formulas for Stresses in Concrete Pavements of Airfields, Transaction of ASCE, Vol.113, Paper No.2340, 1948.
- 6) 坪川将丈: コンクリート舗装の Westergaard 載荷公式及び剛比半径の考察, 国土技術政策総合研究所研究資料, No.1196, 2022.
- 7) Pickett, G. and Ray, G.K.: Influence Charts for Concrete Pavements, Transaction of ASCE, Vol.116, 1951.
- 8) 福手勤: 空港コンクリート舗装厚設計への電算プログラムの応用, 港湾技研資料, 1977.
- 9) Boeing Airport Compatibility : Calculating Tire Contact Area, Frequently Asked Question, 2014.
<https://www.boeing.com/commercial/airports/faq> (2024 年 8 月 1 日閲覧)

国土技術政策総合研究所資料

TECHNICAL NOTE of NILIM

No. 1293

October 2024

編集・発行 ©国土技術政策総合研究所

本資料の転載・複写のお問い合わせは
〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬 3-1-1
管理調整部企画調整課 電話:046-844-5019
E-mail:ysk.nil-46pr@gxb.mlit.go.jp

国土技術政策総合研究所資料

No.1293

コンクリート舗装のWestergard中央部載荷プログラムの改良

October 2024